



**XXIII ENACED**  
ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO  
**III SIEPEC**  
SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE ESTUDOS E  
PESQUISA EM EDUCAÇÃO NAS CIÊNCIAS  
**V ENTECI**  
ENCONTRO DE DEBATES SOBRE TRABALHO,  
EDUCAÇÃO E CURRÍCULO INTEGRALDO

CIÊNCIA, DEMOCRACIA  
E DECOLONIALIDADE:  
CONTRIBUIÇÕES AO DEBATE  
NA EDUCAÇÃO BÁSICA

20 a 22/05/2024  
Unijuí, campus Ijuí



**Eixo Temático: Educação e Tecnologias**

## **PROPOSTA DE ENSINO DO CONCEITO DE PROPORÇÃO A PARTIR DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI**

Marcelo Wachter Maroski<sup>1</sup>

### **RESUMO**

A ideia de proporcionalidade é um dos objetos de estudo mais importantes da Matemática, sendo abordado ao longo de todo o Ensino Fundamental. Para explorar o conceito de proporção, é possível utilizar diversos contextos ou recursos, como é o caso da Geometria Fractal e um de seus representantes mais conhecidos, o Triângulo de Sierpinski. Recorrendo ao software educacional GeoGebra, propôs-se a construção do mencionado fractal para uma turma de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de discutir a proporcionalidade que se verifica entre os lados dos triângulos obtidos em iterações consecutivas. A utilização do GeoGebra permitiu que a atividade proposta fosse desenvolvida de forma prática e eficiente, além de viabilizar a apropriação do conhecimento matemático por parte dos alunos.

**Palavras-chave:** Fractal. GeoGebra. Proporcionalidade. Razão.

### **INTRODUÇÃO**

A ideia de proporção é um dos conceitos mais importantes da matemática do Ensino Fundamental. Conforme texto da Base Nacional Comum Curricular, a proporcionalidade é uma das ideias consideradas fundamentais, ao lado de equivalência, ordem, interdependência, representação e variação, as quais estabelecem articulações entre os diferentes campos da Matemática e ajudam a desenvolver o raciocínio dos alunos (BRASIL, 2018, p. 224).

Conhecido e utilizado desde as civilizações antigas, o conceito de proporção possui grande importância do ponto de vista histórico e se encontra presente em situações do cotidiano dos seres humanos. Além disso, sua aplicabilidade é reconhecida em outras áreas do conhecimento, como a Física, a Química e a Biologia (OLIVEIRA; SANTANA; SILVA, 2018, p. 92).

---

<sup>1</sup> Professor de Matemática na Escola Municipal Fundamental João Goulart de Ijuí (RS), marcelomaroski@gmail.com.



De acordo com a BNCC, a proporcionalidade “[...] deve estar presente no estudo das operações com os números naturais, da representação fracionária dos números racionais, de áreas, de funções, probabilidade, etc.” (BRASIL, 2018, p. 224). Além desses exemplos, é possível ensinar sobre proporcionalidade a partir de contextos da Geometria Plana que consideram a comparação de segmentos de reta, os quais podem, ou não, corresponder aos lados de uma figura poligonal.

Por meio dessa abordagem geométrica, o aluno passa a contar com um recurso visual que lhe permite verificar graficamente a ocorrência da proporcionalidade. A propósito da riqueza visual, um dos campos de interesse da Matemática que mais se destaca nesse quesito é a Geometria Fractal, cujas construções costumam ser agradáveis aos olhos e, geralmente, chamam atenção pela sua beleza.

Diante disso, vislumbra-se a possibilidade de utilizar uma construção da Geometria Fractal para auxiliar o aluno a se apropriar do conceito de proporção, compreendido como uma igualdade entre razões. Em uma situação em que é o próprio aluno quem constrói o fractal, a aprendizagem tende a ser mais efetiva, pois, segundo Lorenzato (2010, p. 72), a experimentação pode ser considerada o melhor método para se conseguir a aprendizagem com significado, permitindo que o aluno se envolva com o assunto em estudo, participe das descobertas, levante hipóteses e busque alternativas.

Conforme apontam Araújo e Marins (2019, p. 23-24), a Geometria Fractal não costuma ser abordada por professores que ensinam Matemática, provavelmente por não se sentirem confortáveis com a temática, exigindo, portanto, maior tempo de estudo e planejamento para que se encontrem meios eficazes de introduzir o estudo dos fractais na sala de aula da Educação Básica. Constatado esse fato, as tecnologias digitais surgem como alternativa para trabalhar com tópicos não tradicionais, visto que esses recursos tendem a facilitar a exploração dos objetos de conhecimento da Matemática e, no geral, são manipulados sem dificuldade pelos jovens contemporâneos.

Dentre as opções que um professor de Matemática possui para inserir tecnologias digitais em sala de aula, destaca-se o software GeoGebra. Desenvolvido em 2001, como parte de uma tese de doutorado (BIRGIN; YAZICI, 2021, p. 928), o GeoGebra é um recurso para



**XXIII ENACED**  
ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO  
**III SIEPEC**  
SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE ESTUDOS E  
PESQUISA EM EDUCAÇÃO NAS CIÊNCIAS  
**V ENTECI**  
ENCONTRO DE DEBATES SOBRE TRABALHO,  
EDUCAÇÃO E CURRÍCULO INTEGRALIZADO

CIÊNCIA, DEMOCRACIA  
E DECOLONIALIDADE:  
CONTRIBUIÇÕES AO DEBATE  
NA EDUCAÇÃO BÁSICA

20 a 22/05/2024  
Unijuí, campus Ijuí



ensinar e aprender Matemática de forma dinâmica, gratuita, com acesso multiplataforma e em todos os níveis de ensino (LUCIANO, 2018, p. 27).

Assim, por meio do presente artigo, pretende-se relatar uma atividade que foi desenvolvida com alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, no intuito de introduzir o conceito de proporção a partir das propriedades do fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski, o qual foi construído com auxílio do GeoGebra. Desse modo, pretende-se discutir o desenvolvimento e os resultados dessa atividade, procurando demonstrar como ocorre a apropriação da ideia de proporcionalidade quando são utilizados os mencionados recursos.

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para o 8º ano do Ensino Fundamental, a BNCC prevê a habilidade EF08MA11, que consiste em “Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.” (BRASIL, 2018, p. 265). Por outro lado, o Referencial Curricular Gaúcho apresenta a habilidade EF08MA13RS-2: “Verificar e reconhecer a existência de uma constante de proporcionalidade, referente a um conjunto de razões, e observar o sentido direto ou inverso da variação que as grandezas proporcionais apresentam, interpretando no contexto do problema.” (RIO GRANDE DO SUL, 2018, p. 156).

Com base nessas habilidades, percebe-se que o trabalho referente aos conceitos de razão e proporção, iniciado em anos anteriores, deve ser retomado e aprofundado no 8º ano do Ensino Fundamental. Diante disso, optou-se por utilizar a Geometria Fractal como recurso para discutir a ideia de proporcionalidade com os alunos do 8º ano da Escola Municipal Fundamental João Goulart, localizada no município de Ijuí, estado do Rio Grande do Sul. A turma em questão, na qual o autor deste trabalho é professor regente do componente curricular Matemática, conta com 11 alunos, os quais já estavam familiarizados com a ideia de razão e necessitavam se aprofundar no estudo do conceito de proporção.

Visto que a abordagem da Geometria Fractal não está prevista nos referenciais curriculares, fez-se necessário introduzir o conceito de fractal aos alunos. De acordo com Carvalho (2005, p. 18), apesar de ser um problema em aberto na Matemática, a definição de



**XXIII ENACED**  
ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO  
**III SIEPEC**  
SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE ESTUDOS E  
PESQUISA EM EDUCAÇÃO NAS CIÊNCIAS  
**V ENTECI**  
ENCONTRO DE DEBATES SOBRE TRABALHO,  
EDUCAÇÃO E CURRÍCULO INTEGRALDO

**CIÊNCIA, DEMOCRACIA  
E DECOLONIALIDADE:  
CONTRIBUIÇÕES AO DEBATE  
NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

20 a 22/05/2024  
Unijuí, campus Ijuí



fractal considera alguns elementos fundamentais, como a presença de um processo iterativo e a verificação da autossimilaridade, ou seja, o fato de que cada parte, quando vista isoladamente, se assemelha ao todo.

Uma vez esclarecidas essas ideias aos alunos, discutiu-se a presença das propriedades dos fractais em exemplos da natureza e apresentou-se alguns fractais clássicos, dentre eles o Triângulo de Sierpinski, o qual foi escolhido para ser construído com auxílio do GeoGebra. Nos parágrafos seguintes, descreve-se o passo a passo utilizado para essa construção.

Inicialmente, acessou-se as configurações do software e alterou-se a opção “Rotular”, selecionando “Menos para os objetos novos”. Isso garante que o rótulo dos objetos criados não apareça na tela do GeoGebra, o que evita a poluição visual do fractal.

Em seguida, ocultou-se os eixos cartesianos e a malha quadriculada, para, então, iniciar a construção propriamente dita, por meio da criação de um ponto qualquer na tela, à vontade de cada aluno. A partir desse ponto, criou-se um segmento com comprimento fixo de 8 unidades, o qual serviu como base para a construção de um triângulo equilátero. Convencionou-se que essa seria a iteração 0.

Prosseguindo, determinou-se o ponto médio de cada um dos lados do triângulo equilátero e construiu-se um novo triângulo com vértices nesses pontos médios. Então, solicitou-se que os alunos escolhessem uma cor de destaque para o triângulo recém criado. Essa é a iteração 1 do Triângulo de Sierpinski.

Considerando que cada iteração compreende a repetição de um conjunto de procedimentos, optou-se por criar uma nova ferramenta no GeoGebra, a qual fosse capaz de reproduzir automaticamente as etapas de cada iteração, agilizando, assim, o processo de construção do fractal. Desse modo, ao criar a nova ferramenta, definiu-se como objetos iniciais os vértices do triângulo equilátero da iteração 0 e como objetos finais os pontos médios e o triângulo colorido com vértices nesses pontos. Com essa configuração, a ferramenta criada permite selecionar três pontos, correspondentes aos vértices de um triângulo, e gerar um novo triângulo com vértices nos pontos médios do primeiro.

Dando sequência à construção no GeoGebra, aplicou-se a ferramenta criada em cada um dos três triângulos não coloridos remanescentes da primeira iteração, gerando, assim, a iteração 2, que conta com nove triângulos não coloridos. Utilizando-se em cada um deles a



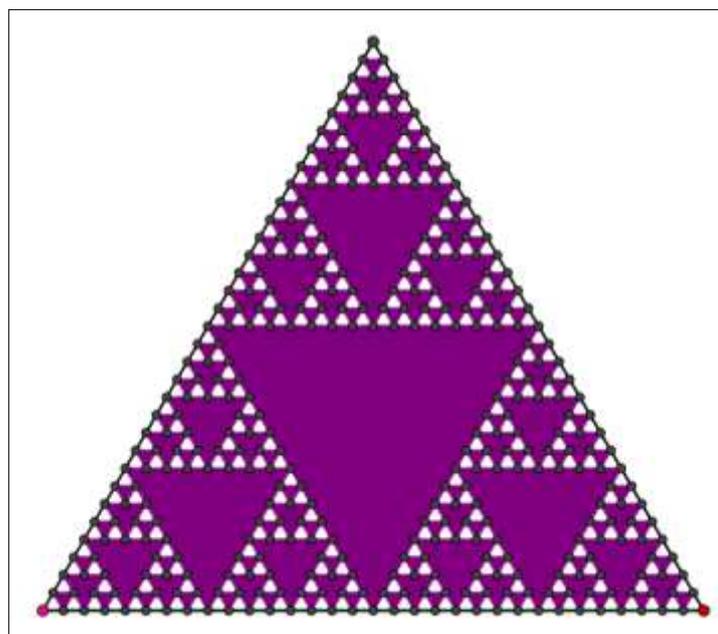
ferramenta criada, realizou-se a iteração 3, sendo que os alunos foram orientados a desenvolver a construção de seus fractais até esse ponto.

Concluídas as três primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski, propôs-se uma discussão, no coletivo da turma, sobre as medidas dos lados dos triângulos coloridos obtidos a cada nova iteração. A partir dessas observações, procurou-se retomar a ideia de razão entre dois números e introduzir o conceito de proporção, conforme explicado a seguir.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em relação à utilização do GeoGebra como ferramenta para trabalhar com Geometria Fractal, acredita-se que o software facilitou a compreensão dos alunos e agilizou o processo de construção do Triângulo de Sierpinski, visto que seria muito mais demorado e trabalhoso construir o fractal em sua forma física, utilizando régua, compasso, lápis, tesoura e papel. Embora tenha sido solicitado aos alunos que fizessem as três primeiras iterações, alguns deles tiveram tanta facilidade em compreender o processo iterativo, e se mostraram tão empolgados com a atividade, que seguiram até a iteração 5, como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1 – Triângulo de Sierpinski construído por um aluno até a iteração 5



Fonte: O autor, 2024.



A partir dos fractais construídos pelos alunos, elaborou-se a Tabela 1, na qual apresenta-se a medida, em unidades de comprimento, do lado do triângulo colorido obtido após cada iteração. Destaca-se que as medidas foram coletadas pelos próprios alunos, a partir de suas construções no GeoGebra, fazendo uso da ferramenta que permite calcular o comprimento de um segmento ou a distância entre dois pontos.

Tabela 1 – Medidas dos lados dos triângulos obtidos a cada iteração

<b>Iteração</b>	<b>Lado do triângulo (u.c.)</b>
0	8
1	4
2	2
3	1

Fonte: O autor, 2024.

Conforme esperado para uma turma de 8º ano, não foi necessário medir o lado do triângulo colorido em todas as iterações, pois a partir da terceira linha da Tabela 1 os alunos perceberam que cada novo lado correspondia à metade do anterior. Além disso, foram capazes de generalizar a ideia, concluindo que na iteração 4 o lado do triângulo colorido mediria 0,5 u.c. e na iteração 5, 0,25 u.c.

A partir dos dados da Tabela 1, determinou-se junto aos alunos as razões entre as medidas dos lados dos triângulos coloridos em iterações consecutivas. Tomando o cuidado de simplificar as razões obtidas, conseguiu-se demonstrar que todas elas eram equivalentes, assim como pode ser observado no esquema da Figura 2.

Facilmente, percebe-se que todas as razões, quando simplificadas, conduzem à mesma, ou seja, de 2 para 1. Isso significa que a medida do lado do triângulo colorido obtido a cada nova iteração é igual à metade da medida verificada na iteração anterior ou, ainda, que a medida do lado do triângulo colorido obtido em determinada iteração é o dobro em relação à iteração seguinte.

Uma vez demonstrada a igualdade entre razões, tal como na Figura 2, introduziu-se aos alunos a ideia de proporcionalidade, que era, na verdade, o objetivo maior da atividade





**XXIII ENACED**  
ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO  
**III SIEPEC**  
SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE ESTUDOS E  
PESQUISA EM EDUCAÇÃO NAS CIÊNCIAS  
**V ENTECI**  
ENCONTRO DE DEBATES SOBRE TRABALHO,  
EDUCAÇÃO E CURRÍCULO INTEGRALDO

CIÊNCIA, DEMOCRACIA  
E DECOLONIALIDADE:  
CONTRIBUIÇÕES AO DEBATE  
NA EDUCAÇÃO BÁSICA

20 a 22/05/2024  
Unijuí, campus Ijuí



oportunidades futuras, é possível explorar questões relativas à quantidade de triângulos após cada iteração, bem como os seus perímetros e as suas áreas.

Seguramente, a utilização do software GeoGebra facilitou a experiência com a Geometria Fractal, possibilitando que a construção do Triângulo de Sierpinski ocorresse de forma eficiente. Além disso, o emprego de um recurso tecnológico digital permitiu que o conceito de proporção fosse verificado graficamente, contribuindo para o levantamento de hipóteses e conduzindo às generalizações desejadas.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Francisco Geovane da Silva; MARINS, Alessandra Senes. Introduzindo a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio da perspectiva da Modelagem Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 6, n. 18, p. 21-34, 2019.

BIRGIN, Osman; YAZICI, Kübra Uzun. The effect of GeoGebra software – supported mathematics instruction on eighth-grade students’ conceptual understanding and retention. **Journal of Computer Assisted Learning**, United Kingdom, v. 37, n. 4, p. 925-939, 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. 600 p.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática**. 2005. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender Matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. 140 p.

LUCIANO, Karina Maria da Fonseca. GeoGebra como opção metodológica. **Cadernos do IME – Série Matemática**, Rio de Janeiro, n. 12, p. 26-38, 2018.

OLIVEIRA, Tamiles da Silva; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; SILVA, Adriana Costa Santos da. As resoluções de estudantes em situações de proporção simples. **Com a palavra, o professor**, Vitória da Conquista, Bahia, v. 3, n. 7, p. 90-110, 2018.

RIO GRANDE DO SUL. **Referencial Curricular Gaúcho**. Porto Alegre: Secretaria de Estado da Educação, 2018. 174 p.