



TREINAMENTO OLÍMPICO PARA ALUNOS DE PANAMBI CLASSIFICADOS PARA A 2ª FASE DA OBMEP

Categoria: Ensino Médio

Modalidade: Materiais e/ou Jogos Didáticos

SILVA, Lorenzo Bruno Watthier da; GABBI, Renan

Instituição participante: Instituto Federal Farroupilha - Campus Panambi/RS

INTRODUÇÃO

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional voltado para escolas públicas e privadas de todo o país, organizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Tem como propósito estimular e promover o estudo da matemática, contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica e possibilitar que um maior número de alunos brasileiros tenha acesso a material didático de qualidade, além de identificar jovens talentos. A OBMEP é estruturada em duas fases. A primeira fase consiste em uma prova objetiva, aplicada a todos os participantes. Os alunos com melhor desempenho nessa etapa avançam para a segunda fase, que apresenta uma prova dissertativa, de maior complexidade, voltada à avaliação da capacidade de raciocínio lógico e argumentação matemática. Os alunos que se destacam na segunda fase são agraciados com medalhas de ouro, prata, bronze e certificados de menção honrosa. Além do reconhecimento, os medalhistas têm acesso a oportunidades acadêmicas valiosas, como a participação no Programa de Iniciação Científica Júnior (PIC).

Em resposta às oportunidades e desafios apresentados pela OBMEP, o Projeto de Extensão Treinamento Olímpico para Alunos de Panambi Classificados para a 2ª Fase da OBMEP foi idealizado como uma iniciativa fundamental para potencializar o desempenho dos estudantes. Este projeto teve a abrangência de convidar todos os alunos de Panambi que lograram êxito na primeira fase, abrangendo tanto aqueles das escolas públicas quanto das particulares. Para fortalecer a experiência educativa, professores dessas instituições foram



igualmente convidados a participar como colaboradores voluntários, compartilhando seus conhecimentos e experiências. Ao longo de sete encontros realizados aos sábados de manhã (agosto, setembro e outubro), no IFFar - Campus Panambi, os alunos tiveram acesso a um ambiente de aprendizado colaborativo e enriquecedor. O foco do projeto reside na resolução de questões de provas anteriores da OBMEP, proporcionando aos participantes as ferramentas necessárias para o desenvolvimento de habilidades críticas e estratégicas. Dessa forma, o projeto visa não apenas preparar os alunos para conquistar as premiações oferecidas pela OBMEP, mas também construir uma base sólida em matemática que influenciará positivamente em suas trajetórias acadêmicas e profissionais futuras.

CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÃO

O paradoxo dos aniversários se torna um tema relevante quando pensamos em probabilidade, um tema recorrente nas provas da OBMEP. Este paradoxo que após revelado o seu resultado, parece não fazer sentido, tem a seguinte pergunta inicial: “Em uma sala onde há n pessoas, qual é a probabilidade de que duas delas façam aniversário no mesmo dia?”. Muitos são os argumentos que vem para justificar a baixa probabilidade, o principal deles: “O ano possui 365 dias, logo, precisamos de várias pessoas na sala para que duas compartilhem o mesmo dia de aniversário”. Argumento facilmente quebrado após alguns cálculos, tendo em vista que depois de efetuados podemos provar que com 23 pessoas na sala, a probabilidade de duas compartilharem o aniversário já passa de 50%.

Como pode um número tão pequeno gerar tamanha probabilidade? Para nos aprofundarmos nessa questão, devemos considerar as interações entre os aniversários, não apenas focando em um único par, mas sim em todos os possíveis pares formados no grupo. Cada nova adição à sala aumenta as chances de coincidências, e a matemática por trás desse fenômeno é tanto simples quanto fascinante.

Para compreender plenamente o paradoxo dos aniversários, é essencial abordarmos a matemática subjacente a essa questão intrigante. Definimos $P(n)$ como a probabilidade de que, em um grupo de n pessoas, pelo menos duas compartilhem o mesmo dia de aniversário. Para calcular essa probabilidade, utilizamos o complemento, isto é, a probabilidade de que nenhuma pessoa tenha o mesmo aniversário. A fórmula para $P(n)$ é, portanto:

$$P(n) = 1 - P(\text{nenhuma coincidência})$$



A probabilidade de que nenhuma das n pessoas compartilhe o aniversário pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(\text{nenhuma coincidência}) = 365/365 * 364/365 * 363/365 * \dots * (365 - n + 1)/365$$

Essa fórmula considera que a primeira pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 365 dias. Para a segunda pessoa, existem 364 dias disponíveis que não coincidem com o aniversário da primeira, e assim sucessivamente. Simplificando essa expressão, podemos reescrevê-la como:

$$P(n) = 1 - 365! / (365 - n)! * 365^n$$

Agora, vamos testar o caso específico de $n = 23$:

$$P(23) = 1 - 365! / (365 - 23)! * 365^{23}$$

Para 23 pessoas, a probabilidade de que nenhuma compartilhe o aniversário é:

$$P(\text{nenhuma coincidência}) = 365/365 * 364/365 * 363/365 * \dots * 343/365$$

Isso pode ser computado como:

$$P(\text{nenhuma coincidência}) = 0.4927$$

Portanto, a probabilidade de que pelo menos duas pessoas compartilhem um aniversário é:

$$P(23) = 1 - P(\text{nenhuma coincidência}) = 1 - 0.4927 = 0.5073$$

Assim, a probabilidade de que pelo menos duas pessoas compartilhem o mesmo aniversário em um grupo de 23 indivíduos se aproxima de 50%, revelando a natureza surpreendente desse fenômeno.

Para ilustrar essa ideia, considere a Tabela 1, que mostra como a probabilidade de pelo menos duas pessoas compartilharem um aniversário varia com o aumento do número de participantes.

Tabela 1 - Probabilidade de pelo menos duas pessoas compartilharem um aniversário.

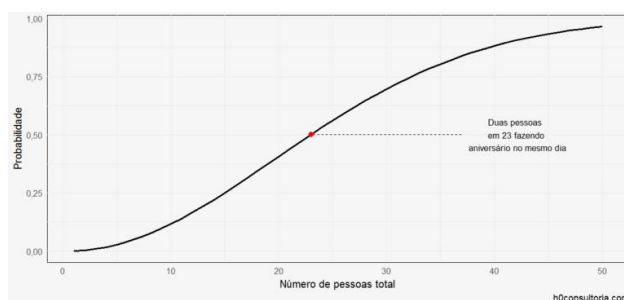
Número de pessoas	Probabilidade (%)
10	11,7
20	41,11
23	50
57	99

Fonte: Castro (2022)



E o gráfico a seguir ilustra visualmente essa intrigante relação, onde a probabilidade aumenta rapidamente à medida que mais pessoas são incluídas, estabilizando em níveis altos conforme o número de participantes se aproxima de 50.

Figura 1 - Probabilidade de duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia.



Fonte: Castro (2022)

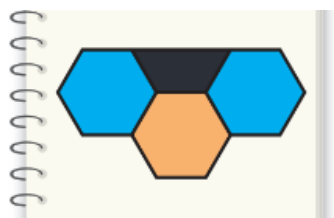
Como podemos observar, a curva de probabilidade inicial cresce de maneira acentuada, evidenciando que, com um número surpreendentemente baixo de participantes, a chance de coincidência já se torna significativa. Essa revelação nos leva a refletir sobre a natureza das probabilidades e o impacto que percepções comuns podem ter em nossas interpretações matemáticas.

Esse paradoxo é um excelente exemplo de como a matemática pode desafiar nossa intuição e levar a questionamentos mais profundos. Em muitos aspectos, ele se assemelha às questões apresentadas na OBMEP, onde problemas que parecem simples à primeira vista podem se revelar desafiadores e surpreendentes, exigindo não apenas conhecimento técnico, mas também uma habilidade crítica para pensar fora da caixa.

Assim como o paradoxo dos aniversários, as questões da OBMEP desafiam os alunos a pensar além do óbvio, exigindo uma análise aprofundada e rigorosa. Um exemplo notável é a Questão 2 da OBMEP Nível 3 de 2021, que foi abordada durante o projeto e exemplifica a complexidade na busca por uma solução direta. Nessa questão, os estudantes se deparam com uma figura geométrica composta por hexágonos e trapézios, e a tarefa consiste em determinar de quantas maneiras distintas essa figura pode ser pintada, respeitando restrições que proíbem que polígonos adjacentes compartilhem a mesma cor. A habilidade de manipular diferentes possibilidades de pintura e a atenção às regras impostas revelam quão desafiador pode ser o processo de resolução, refletindo a natureza intrigante das questões da OBMEP.



(OBMEP, 2021) Maria pinta, em seu caderno, figuras formadas por trapézios e hexágonos. Cada hexágono pode ser pintado de azul, bege ou cinza, e cada trapézio, de azul ou preto. Polígonos com um lado em comum não podem ter a mesma cor. A figura ao lado é um exemplo de uma pintura feita por Maria.



a) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



Assim como nas demais questões abordadas durante o projeto, após uma análise individual de cada estudante, discutimos em grupo as possíveis soluções. Ao final dessa dinâmica colaborativa, o professor conduziu a correção, esclarecendo dúvidas e proporcionando uma compreensão mais profunda do conteúdo.

Resolução da OBMEP para o item a: Maria pode pintar de azul tanto o hexágono como o trapézio e, portanto, essa cor deve ser tratada separadamente. Caso 1: o hexágono foi pintado de azul. Então, para não repetir a mesma no trapézio, este só pode ser pintado de preto (1 possibilidade). Caso 2: o hexágono não foi pintado de azul (2 possibilidades). Nesse caso, Maria pode pintar o trapézio de azul ou de preto (2 possibilidades). Pelo Princípio Multiplicativo da Contagem, há, então, $2 \times 2 = 4$ possibilidades de pinturas. Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 1 de $1 + 4 = 5$ maneiras diferentes.

b) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?

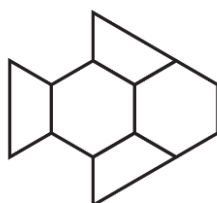


Resolução da OBMEP para o item b: Novamente, façamos a divisão em casos: Caso 1: O hexágono foi pintado de azul por Maria. Logo, todos os três trapézios devem ser pintados de preto (1 possibilidade). Caso 2: O hexágono não foi pintado de azul (2 possibilidades).

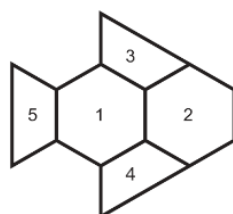


Nesse caso, cada um dos três trapézios da Figura 2 podem ser pintados de azul ou preto. Pelo princípio multiplicativo, há $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades de pinturas. Juntando os dois casos, vemos que Maria pode pintar a Figura 2 de $1 + 16 = 17$ maneiras diferentes.

c) De quantas maneiras Maria pode pintar a figura abaixo?



Resolução da OBMEP para o item c: Vamos enumerar as regiões de acordo com a figura:



Vamos dividir em 6 casos: Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor bege. Nesse caso, os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade). Hexágono 1 na cor azul, hexágono 2 na cor cinza. Nesse caso, também os trapézios 3, 4 e 5 devem ser pintados de preto (1 possibilidade). Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, mas o trapézio 5 pode ser pintado de azul ou preto (2 possibilidades). Hexágono 1 na cor bege, hexágono 2 na cor cinza. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores ($2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades). Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor azul. Nesse caso, os trapézios 3 e 4 devem ser pintados de preto, e o trapézio 5 pode ser pintado de duas cores (2 possibilidades). Hexágono 1 na cor cinza, hexágono 2 na cor bege. Cada trapézio pode ser pintado de duas cores ($2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades). Logo, há $1 + 1 + 2 + 8 + 2 + 8 = 22$ maneiras diferentes de Maria pintar a Figura 3.

CONCLUSÕES



A metodologia utilizada foi eficiente. Ao longo dos dias foi possível verificar maior facilidade na resolução de alguns problemas semelhantes, algo muito corriqueiro em provas da OBMEP. Ademais, as experiências vivenciadas pelos alunos também são extremamente importantes, logo que trocaram conhecimentos com pessoas novas e desenvolveram habilidades de trabalho em grupo e argumentação, o que implica positivamente tanto na carreira acadêmica quanto na carreira profissional dos alunos.

REFERÊNCIAS

GABBI, R.; BORGES, F. D.; NEUMANN, D. A. M.. **Preparação para as olimpíadas de matemática: OBMEP E OIMSF**. Feira Regional de Matemática, v. 1, n. 1, 2017.

GABBI, R.; PENA, G.; NEUMANN, D. **Probabilidade nas olimpíadas de matemática: um assunto recorrente**. Feira Regional de Matemática, v. 2, n. 2, 2018.

CASTRO, M. **O paradoxo dos aniversários - Modelo Artigo Científico – TCC final - Folha Única.** [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.folhaunica.com.br/unico-educacional/aluno-unico/2022/10/marianna-de-castro/o-paradoxo-dos-anivesarios-modelo-artigo-cientifico-tcc-final/>. Acesso em: 6 out. 2024.

MOHR, A.; SANTOS, L. M.; GABBI, R.. **Probabilidade em olimpíadas de matemática: o problema de monty hall**. Feira Regional de Matemática, v. 4, n. 4, 2022.

OBMEP. **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/>>. Acesso em: 06 out. 2024.

Trabalho desenvolvido no Projeto de Extensão “Preparação de alunos do município de Panambi para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)” durante os meses de agosto, setembro e outubro.

Dados para contato:

Expositor: Lorenzo Bruno Watthier da Silva; **e-mail:** lorenzo.2023312808@aluno.iffar.edu.br

Professor Orientador: Renan Gabbi; e-mail: renan.gabbi@iffar.edu.br