Evento: XXIV Jornada de Pesquisa

ANÁLISE DA DESCONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO E O ESTUDO DO COMPORTAMENTO NAS PROXIMIDADES DE UM PONTO[1]
ANALYSIS OF THE DISCONTINUITY OF A FUNCTION AND THE STUDY OF BEHAVIOR NEAR A POINT

Angéli Cervi Gabbi[2], Cátia Maria Nehring[3]

[1] Parte da Tese de Doutorado da Pesquisadora, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências.
[2] Doutoranda em Educação nas Ciências, Docente do IFRS, GEEM, angeli.gabbi@ibiruba.ifrs.edu.br
[3] Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação nas Ciências da UNIJUÍ, DCEEng, GEEM, Orientadora, catia@unijui.edu.br

Resumo: Este texto apresenta resultados parciais de uma pesquisa que procura evidenciar aspectos revelados acerca da compreensão do conceito função, por estudantes da educação superior. Justifica-se a realização desta pesquisa diante da importância atribuída à compreensão de tal conceito à aprendizagem de conteúdos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, disciplina esta, responsável por elevados índices de reprovação e evasão. Assim sendo, optou-se, neste artigo, por analisar os registros de representação, escritos e orais, produzidos por um grupo de onze estudantes dos cursos de Matemática (Licenciatura), Engenharia Civil e Engenharia Elétrica de uma Universidade comunitária do estado do Rio Grande do Sul, em uma atividade de ensino que envolveu o conceito função. A análise busca aporte teórico na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na Teoria dos Campos Conceituais. Os resultados desta análise evidenciam a necessidade de um ensino voltado à proposição de situações de aprendizagem que instiguem os estudantes a mobilizarem diferentes registros de representação de um mesmo objeto de estudo e, sobretudo, que instiguem a realização de transformações entre diferentes registros, a fim de viabilizar a compreensão do conceito de função e, consequentemente, contribuir com a compreensão de outros conceitos trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Palavras-Chave: Aprendizagem. Função Racional. Continuidade. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Teoria dos Campos Conceituais.

Abstract: This text presents partial results of a research that seeks to emphasize revealed aspects about the understanding of the concept of function, by students of higher education. This research is justified by the importance attributed to the comprehension of this concept to the learning of contents in the discipline of Differential and Integral Calculus I, which is responsible for high failure and evasion rates. Therefore, we have chosen to analyze the written and oral representation records produced by a group of eleven students from the undergraduate courses of Mathematics (Teacher Training), Civil Engineering, and Electrical Engineering of a community university in the state of Rio Grande do Sul, in a teaching activity that involved the concept of function. The analysis seeks theoretical support in the Theory of Semiotic Representation Records and Theory of Conceptual Fields. The results confirm the need for a teaching aimed at proposing learning situations, which instigate students to mobilize different registers of representation of the same object of study and, above all, to instigate transformations among different registers in order to enable the understanding of the concept of function and, consequently, contribute to the understanding of other concepts worked in the discipline of Differential and Integral Calculus I.

Keywords: Learning. Rational Function. Continuity. Theory of Semiotic Representation Registers. Theory of Conceptual Fields.

Introdução/Justificativa

A importância do conceito função, não se restringe apenas à singularidade que exerce dentro da área da Matemática, mas também pela sua vasta e recorrente aplicação em muitos outros campos do saber. O conceito função precisa ser e estar significado pelos estudantes em formação acadêmica, pois é um conceito essencial na medida em que associa e articula conhecimentos e entendimentos em diversas áreas científicas, bem como, potencializa a relação entre os diferentes campos de conhecimento da Matemática e seus conceitos, constituindo um elo para a construção de outros, como é o caso de Limite, Continuidade, Derivada e Integral, conteúdos esses abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI – I). A não compreensão do conceito função pelo estudante pode trazer prejuízos em outros conceitos matemáticos que necessitam deste. Nesta perspectiva, o conceito função é essencial para o estudo do Cálculo.

Duval (2005, 2009) salienta a importância do estudo das funções, destacando a articulação das suas várias representações, que também contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois uma dada representação, evidencia apenas um aspecto do objeto em estudo. Já o trabalho com várias representações proporciona uma visão global deste objeto, o que propicia a capacidade do estudante articular diversos conhecimentos, em relação ao objeto estudado.

O pesquisador entende que a matemática trabalha com objetos abstratos, não diretamente perceptíveis ou observáveis com o auxílio de um instrumento, necessitando assim de representações para sua apreensão. Por exemplo, o acesso ao conceito função não é possível sem a utilização de um sistema de representação que permita designá-las. E essas representações são feitas por meio de símbolos, signos, códigos, tabelas e gráficos, denominados por Duval como registro de representação semiótica.

A variedade de representações para um mesmo objeto aponta para a possibilidade de transformação dessas representações em outras, podendo ocorrer dois tipos distintos de transformações na perspectiva da aprendizagem: tratamento e conversão.

- Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

- As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica (DUVAL, 2005, p. 16).

A conversão entre registros de representação semiótica exige dos sujeitos o estabelecimento de diferenciação entre significado e significante, ou seja, entre o conceito matemático representado e o símbolo utilizado para representá-lo. Isso significa que, ao realizar a conversão os estudantes são levados a diferenciar a representação (significante) do conceito matemático representado (significado), compreender que o objeto matemático precisa ser desenvolvido a partir de transformações de conversão e tratamento é condição para a compreensão e significação conceitual em matemática.

Assim, ao mesmo tempo que Duval concentra suas pesquisas na questão dos diversos registros de representação dos objetos matemáticos, Vergnaud enfoca nas relações advindas e ocasionadas pelos conceitos. Duval não apresenta, explicitamente, sobre a noção de conceito, enquanto que para Vergnaud essa definição é profundamente importante como ponto de análise da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) em relação ao processo de conceitualização. Sendo assim, este último pesquisador propõe estudar os campos conceituais, uma vez que em uma determinada situação problema, um conceito nunca aparece isolado.

A necessidade de diversificação de situações adquire um papel importante no processo de conceitualização, pois fornece uma base para que os estudantes possam testar seus modelos explicativos em contextos diversos. O sujeito, frente a uma dada situação, age segundo as representações que dela faz, sendo o esquema o elo entre as representações e a sua conduta.

Conforme Vergnaud, o “conceito” tem um sentido mais amplo do que comumente utilizado. Para ele, o conceito “envolve um conjunto de situações que lhe dão significado: um conjunto de invariantes – propriedades do conceito – subjacentes ao raciocínio e um conjunto de símbolos utilizados para sua representação” (VERGNAUD, 1995 *apud* GROSSI, 2017, p. 18). Neste cenário, os conceitos se organizam em forma de esquemas.

A palavra “esquema” para Vergnaud, significa “a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada” (1993, p. 02). Segundo ele, “é nos esquemas que se devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória” (Ibid, p. 02). Os invariantes operatórios fazem parte dos esquemas, que podem levar tanto os conhecimentos explícitos quanto os implícitos. “Esquemas são fundamentais porque geram ações, incluindo operações intelectuais, mas podem gerá-las porque contêm invariantes operatórios (teoremas e conceitos-em-ação) que formam o núcleo da representação" (MOREIRA, 2002, p. 16), sendo estes o elo entre os conceitos e os esquemas.

Assim como na TRRS de Duval, para Vergnaud (1990, 1993) as representações semióticas, representadas pela linguagem verbal e outros signos, apresentam funções para além daquela representacional. Elas funcionam para a comunicação e para auxiliar o pensamento, como instrumentos de organização das experiências, como instrumentos de conceitualização do real.

A ênfase que Vergnaud (1993) atribui às situações para a compreensão de um determinado conceito é tão significativa, que ele afirma ser a primeira entrada de um campo conceitual um conjunto de situações, um contexto. No entanto, juntamente com as situações estão os conceitos, pois "[...] a teoria dos campos conceituais surge, sobretudo, como uma psicologia dos conceitos" (Ibid, p. 9). A conceitualização é o cerne do desenvolvimento cognitivo, sendo assim, devemos compreender o que se entende por conceito na TCC. Vergnaud explica que, um campo conceitual é necessariamente definido por três conjuntos, representado por C = (S, I, Y), onde:

S é o *conjunto das situações* que dão sentido ao conceito (referência).

I é o *conjunto de invariantes* (objetos, propriedades e relações) em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). O primeiro conjunto (das situações, *S*) evoca operações de pensamentos precisas que se referem aos invariantes operatórios, que não precisam ser explícitos, que procuram moldar uma situação, extraindo propriedades e relações.

Y é o *conjunto das formas de linguagem* que permitem representar, simbolicamente, o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante). É o conjunto das representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, ...) que podem ser utilizadas para indicar e representar esses invariantes, descrevendo as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Neste sentido, como são as situações que dão sentido aos conceitos, é apropriado definir campo conceitual como sendo um conjunto de situações. Assim, quando estudamos o desenvolvimento e uso de um conceito, ao longo da aprendizagem, devemos considerar esses três conjuntos concomitantemente. Desenvolvendo seus esquemas, os estudantes tornam-se mais hábeis para enfrentar situações e/ou problemas cada vez mais complexos.

Procedimento Metodológico

Planejamos e realizamos uma sequência de ensino[1], estruturada em várias situações problemas/questões matemáticas desenvolvidos em sete encontros, para onze estudantes. Os encontros aconteciam semanalmente, com duração de duas (02) horas, sendo realizados no segundo semestre de 2016. Destes onze universitários participantes, somente uma acadêmica ainda não havia tido contato com a disciplina de CDI - I, os demais estavam cursando a mesma no referido semestre.

Os encontros aconteceram em turno inverso ao das aulas. Os estudantes foram agrupados em dois grupos de quatro integrantes e um grupo de três. Todos os encontros foram gravados e filmados, além disso as pesquisadoras fizeram anotações em um diário de campo, sendo devidamente datados. As gravações foram transcritas e também indicadas pela data do encontro com identificação da fala/conversa/intervenção entre os estudantes e entre eles e as pesquisadoras.

Foram considerados como dados empíricos desta pesquisa as falas transcritas e os registros produzidos pelos estudantes que aceitaram voluntariamente participar da pesquisa e que, a partir da assinatura do Termo de Livre Consentimento, autorizaram o uso dos referidos dados na pesquisa. Cabe salientar que utilizamos nomes fictícios nas transcrições, para preservar o anonimato dos estudantes.

Para esta produção focamos os dados de um grupo, o Grupo 01 e os diálogos realizados entre os estudantes e destes com as pesquisadoras, além de momentos no grande grupo, quando envolvia diálogo entre as pesquisadoras e todos os estudantes dos grupos. Selecionamos um encontro, e deste uma atividade para buscar elementos e indícios que apontam para a aprendizagem dos estudantes quando estão trabalhando com uma função que apresenta uma descontinuidade no ponto $x = 2$, bem como, análise do domínio e os diferentes registros de representação empregados para resolvê-la. A referida situação está descrita no Quadro 1. Este foi o quarto encontro realizado no dia 10 de novembro de 2016.

Quadro 1: Situação problema apresentada aos estudantes de todos os grupos

Dada a função $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$, avalie-a quanto:

a) Qual é o valor de $f(4)$? E o valor de $f(6)$?

b) E qual o valor de $f(2)$? Justifique.

c) Que tipo de gráfico irá resultar? Uma reta? Uma parábola?

d) De que forma poderíamos realizar um estudo acerca da existência ou não de $f(2)$?

e) É possível simplificar, algebricamente, a expressão que define $f(x)$? Em caso afirmativo, obtenha esta expressão. Tal expressão apresenta alguma restrição? Justifique.

f) No quadro a seguir apresentamos $x = 2$ e valores de x que se aproximam de $x = 2$ pelo lado esquerdo e pelo lado direito. Estabeleça as respectivas imagens, se possível.

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$							

g) Observando os resultados numéricos de $f(x)$ é possível observar algum comportamento nas proximidades de $x=2$?

h) De qual valor $f(x)$ se aproxima a medida que x se aproxima de dois pela esquerda? E pela direita?

i) Represente graficamente a função.

Fonte: Dados produzidos na pesquisa.

Os estudantes analisaram a mesma e começaram as discussões nos grupos. Apresentamos aqui, recortes de diálogos realizados pelos estudantes do Grupo 01 e em interação entre todos os estudantes com as pesquisadoras, identificando movimentos de ensino, de aprendizagem e negociações necessárias. Na tentativa de identificar indícios da problematização, entendemos que a efetiva apreensão conceitual pelos estudantes acontece mediante ações docentes que proporcionam esta significação, sendo que a TRRS e a TCC são potenciais neste processo.

Resultados e discussões

Após receberem a situação, os estudantes começaram a discuti-la nos grupos, na tentativa de resolvê-la, como podemos observar nos diálogos apresentados nos Quadros abaixo.

Quadro 2: Diálogo entre estudantes do Grupo 01 e pesquisadora

(01) **Amanda:** Prof., a gente tem que achar o limite? Porque vai dar zero sobre zero né, daí tenho que achar o limite *[referindo-se ao valor de f(2)]*.
(02) **Pesq. 02:** No estudo de uma função o que significa o zero sobre zero?
(03) **Amanda:** Indeterminação.
(04) **Pesq. 02:** No estudo de uma função?
(05) **Amanda:** É zero.
(06) **Pesq. 02:** É zero, será? Analisa a função que você tem.
(07) **Letícia**: Eu acho que é zero.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, quarto encontro, Grupo 01, 10/11/2016.

Constatamos, pela Figura 1 abaixo, que para resolução da letra *a*, encontrar *f(4)* e *f(6)*, os estudantes não apresentaram dificuldades, pois todos conseguiram realizar a atividade de tratamento no registro algébrico, expressando de forma numérica as duas imagens solicitadas a partir da representação algébrica fornecida pela função.

Figura 1: Recorte do tratamento algébrico desenvolvido pela estudante Maria

a) $f(4) = \dfrac{(4^2-4)}{(4-2)} = \dfrac{16-4}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$f(6) = \dfrac{(6^2-4)}{(6-2)} = \dfrac{36-4}{4} = \dfrac{32}{4} = 8$

Fonte: Dados produzidos na pesquisa.

No entanto, percebemos pelo Quadro 2, que os estudantes não estavam conseguindo resolver a questão da letra *b*, ou seja, encontrar *f(2)*, por entender que se tratava do estudo de limite, não considerando o conceito de função racional. Os estudantes não conseguiam identificar a não existência de uma fração com denominador zero para uma função racional, pois no estudo da função fracionária 0/0 não existe, já no estudo de limite, 0/0 é indeterminação. O conceito de limite tem por objetivo estudar uma função à medida que o seu domínio se aproxima de um determinado valor, sendo assim, analisamos o valor da imagem de acordo com o domínio, isto é, analisar o comportamento da função.

Os estudantes não consideraram analisar o domínio da função dada, visto que sem declarar o domínio da função, estamos considerando este como sendo o conjunto de todos os números reais de x, o que não é o caso da função em análise, pois no denominador temos x-2, o que indica que a função terá como domínio todos os números reais exceto o número 2 ($D=R-\{2\}$) e que, portanto, neste ponto ($x = 2$) temos uma descontinuidade na função, não existindo imagem para este ponto. O estudo do domínio se torna importante para analisar a função em questão, pois se não identificarmos as restrições (domínio) contidas em uma determinada função, podemos não chegar à solução da questão proposta.

Ressalta-se ainda, que os estudantes tinham dúvidas acerca da possibilidade de uma divisão por zero, como podemos perceber na fala da estudante Amanda (Quadro 2, linha 05), afirmando que 0/0 resulta em zero. Percebe-se que os estudantes tinham sua atenção voltada apenas à operacionalização da divisão, não conseguindo mobilizar esquemas para compreensão e significação da representação 0/0 (zero dividido por zero), que para o estudo da função racional não existe.

Este entendimento é fundamental para que o estudante consiga compreender o conceito de limite de uma determinada função, bem como, entender o comportamento da função em questão, isto é, o que está acontecendo com a variável dependente quando atribuímos o valor 2 para a variável independente? E o que isto implica no registro gráfico? Respondendo essas questões para o caso da função racional apresentada, verificamos que não existirá variável dependente (y) quando $x = 2$, e que no registro figural teremos uma descontinuidade neste ponto. Esperava-se que os estudantes não tivessem dificuldades em resolver essa questão da letra *b*, principalmente porque são estudantes em formação acadêmica, sendo que a maioria deles já estavam cursando a disciplina de CDI - I.

Percebendo que os estudantes estavam com dificuldades em compreender o valor de *f(2)*, as pesquisadoras chamaram todos para então analisar e pensar em conjunto a questão, como pode ser identificado no Quadro 3 a seguir.

Quadro 3: Diálogo entre estudantes de todos os grupos e pesquisadoras, estudo da função racional

Evento: XXIV Jornada de Pesquisa

(01) **Pesq. 02:** Pessoal, uma dúvida que está surgindo, vamos pensar juntos. No estudo da função, o que é zero sobre zero?
(02) **Tamara:** Um ponto indefinido.
(03) **Amanda:** É zero.
(04) **Fernando:** Não existe.
(05) **Gustavo:** Não pode ser 0.
(06) **Gustavo:** É indefinido, não existe aquele ponto.
(07) **Fernando:** É um ponto onde não vai ter ponto no gráfico.
(08) **Pesq. 01:** Por que vocês acham que é indefinido, indeterminação?
(09) **Gustavo:** Porque não dá para saber o que é.
(10) **Renato:** Como eu vou tirar nada de nada? Nada dividido por nada. Isso não tem lógica, sei lá, é indeterminado.
(11) **Pesq. 02:** Quando a gente estuda limite, o que é zero sobre zero?
(12) **Todos:** Indeterminação!
(13) **Pesq. 02:** Isso! Lá no Cálculo. Agora, quando a gente está no estudo de função, o que acontece? Nós estamos com duas posições. Para gente entender, uma que nós vimos que não existe e a outra que é zero né? Que são opiniões diferentes. Primeiro nós temos que zero sobre zero é igual a x. Eu posso dizer que zero é igual a zero que multiplica *x*? Aí nós temos 0 que multiplica *x* igual a 0, aí eu pergunto para vocês, que número que eu multiplico por zero me dá zero? *[Pesquisadora utiliza o quadro para sua explicação, fazendo:* $\frac{0}{0} = x \rightarrow 0 = 0.x$*]*.
(14) **Todos:** Qualquer número!
(15) **Pesq. 02:** Isso, porque aqui poderia ser qualquer valor, certo? *[todos concordam]*. Então, não poderia ser zero por este entendimento, mas quando estamos no estudo da função, isso aqui não existe, por quê? Qual a diferença entre a gente estar trabalhando com a função e estar trabalhando com o limite? São tratamentos diferentes.
(16) **Gustavo:** É que o limite não chega no ponto, ele chega próximo do ponto.
(17) **Pesq. 02:** Muito bem, o limite vai ser sempre uma aproximação. Então, a gente está avaliando esse valor 2, quando estamos trabalhando com limite? Não, é uma aproximação, mas agora a gente está especificamente trabalhando no ponto, e ele considera exclusivamente quem?
(18) **Fernando:** x = 2.
(19) **Gustavo:** x = 2.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, quarto encontro, Integrantes de todos os grupos, 10/11/2016.

Após intervenções e questionamentos feitos pelas pesquisadoras (Quadro 3), alguns estudantes conseguem compreender o significado de 0/0 (linhas 13 e 14), bem como, alguns deles conseguem entender a diferença em estarmos trabalhando com função e limite (linhas 12 e 16). Ressaltamos neste momento, a importância do docente fazer questionamentos e intervenções que auxiliem os estudantes a pensar e refletir sobre o que estão fazendo.

A seguir, apresentamos o diálogo do Grupo 01, em relação ao tipo de gráfico que a função dada iria resultar, bem como discussão entre a descontinuidade no ponto x = 2.

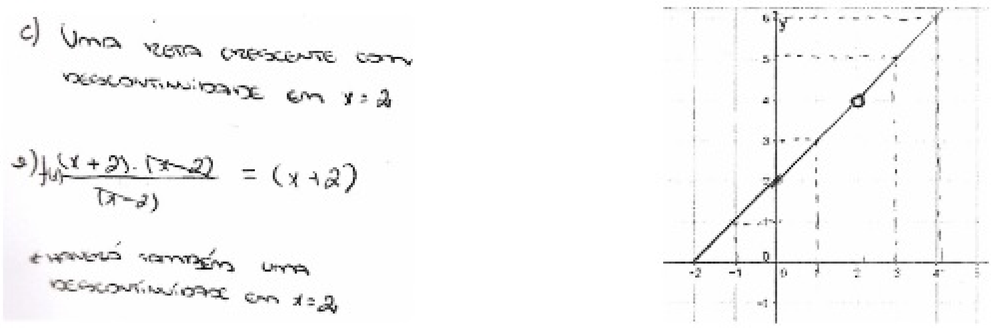
Quadro 4: Diálogo entre estudantes do Grupo 01, relação entre o registro algébrico e gráfico

(01) **Maria:** Vai ser uma parábola né?¶ (02) **Letícia:** Não, é uma reta.¶ (03) **Amanda:** Então no ponto dois vai ser um ponto aberto?¶ (04) **Letícia:** Então tem descontinuidade em *x* igual a dois *[depois de alguns segundos a estudante continua]*. Não pensa como limite, pensa como função.¶ (05) **Amanda:** Tá mas eu não consigo.¶ (06) **Letícia:** *x* se aproxima de dois e *f(x)* se aproxima de quatro. Ela vai chegar muito muito muito perto de 4 mas ela não vai ser 4.¶

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, quarto encontro, Grupo 01, 10/11/2016.

Pelo Quadro 4, podemos perceber que alguns estudantes estavam em dúvida sobre o tipo de gráfico que a função da situação proposta iria resultar. A estudante Maria fica em dúvida e pergunta para os colegas do grupo se será uma parábola (linha 01). Certamente essa incerteza se deu em razão da função racional apresentar em seu numerador uma expressão quadrática. Entretanto, Letícia afirma ser uma reta (linha 02), o que demonstra que conseguiu mobilizar esquemas e conhecimentos em ação, de forma implícita, utilizando o conceito de fatoração e simplificação da função proposta, como podemos perceber na Figura 2.

Figura 2: Registro algébrico e gráfico da estudante Letícia



Fonte: Dados produzidos na pesquisa.

Apesar das discussões entre as pesquisadoras e os estudantes, conforme podemos observar no Quadro 3, ainda assim, alguns deles estavam com dúvida se teria ponto aberto ou não em $x = 2$, como mostra o Quadro 4 (linha 03). O que implica que alguns estudantes ainda não desenvolveram esquemas necessários para compreensão de conceitos essenciais na matemática, esquemas esses que de acordo com Vergnaud são fundamentais para que os estudantes se apropriem dos conceitos matemáticos em questão. Para o autor, o conhecimento consiste simultaneamente de significados e de significantes, ou seja, do conceito matemático representado e o símbolo utilizado para representá-lo.

Já a estudante Letícia (Quadro 4, linha 04) consegue estabelecer um sentido e criar significado para a situação, dizendo que há uma descontinuidade no ponto $x = 2$, o que é verdade, já que neste ponto a função não existe.

As pesquisadoras novamente chamam todos os estudantes dos grupos para discussão no coletivo, alertando para o tipo de gráfico que a função iria resultar, como podemos verificar no Quadro 5.

Quadro 5: Diálogo entre estudantes e pesquisadoras, analisando a função racional

(01) **Pesq. 02:** Pessoal, que tipo de gráfico irá resultar essa função?
(02) **Gustavo:** Uma reta.
(03) **Leandro:** Vai ser uma reta.
(04) **Pesq. 01:** Então, qual o comportamento dessa função?
(05) **Fernando:** Crescente.
(06) **Pesq. 01:** O que mais de informações podemos dizer sobre o comportamento da função? *[sem resposta a outra pesquisadora continua]*.
(07) **Pesq. 02:** E como sabemos que essa função nos dá uma reta?
(08) **Integrante do grupo 02:** Porque tem uma do segundo grau dividido por uma de primeiro grau, ai dá uma função de primeiro grau.
(09) **Pesq. 02:** Ótimo, então, chegamos numa reta, o que a gente tem que cuidar quando vocês forem fazer o gráfico? O que essa reta vai apresentar?
(10) **Integrante do grupo 02:** Descontinuidade.
(11) **Luísa:** Tá, mas o 2 vai ser no 4 ou vai ser como?
(12) **Sabrina:** Eu acho que vai até o 4 mas não fecha a bolinha.
(13) **Luísa:** Vai ser aberto então?
(14) **Renato:** Eu diria que o 2 não pertence à reta, só isso.
(15) **Tamara:** Quando eu chego em *f(2)*, coloco 0/0 né? Não vou colocar o 4.
(16) **Gustavo:** Coloca não existe.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, quarto encontro, Integrantes de todos os grupos, 10/11/2016.

Quando perguntamos sobre o comportamento da função (linha 04), os estudantes apenas pensaram na palavra crescente (linha 05), depois de algum tempo, com questionamentos das pesquisadoras é que foram surgindo outras características, como analisar o grau da função e o coeficiente angular (Quadro 6, linhas 31 e 33). Ao serem questionados sobre a simplificação da função racional depois de fatorá-la (linha 07), os estudantes do Grupo 02 (linha 08) conseguiram expressar, utilizando o registro da língua natural, que pelo fato de termos uma função de grau dois dividido por uma função de grau um, resultaria em uma função afim, como observamos no diálogo do Quadro 5. Isto significa que esses estudantes conseguiram atribuir significado, estabelecendo sentidos e criando conceitos em ação para essa relação, o que gera esquemas nos estudantes. De acordo com Vergnaud, os conceitos se organizam em forma de esquemas e é nesses esquemas que devemos pesquisar os conhecimentos em ação dos estudantes. Para Battisti

(2016, p. 119), "à medida que o acadêmico se apropria de significações, passa a ter tomada de consciência destas e não age mecanicamente. [...] As significações já apreendidas passam a ser utilizadas como ferramentas para novas apropriações". Sendo assim, à medida que o estudante se apropriar do significado do conceito, neste caso o conceito função, haverá maiores possibilidades de intervir como profissional na sociedade, produzindo novos conhecimentos e desenvolvendo-se profissionalmente.

Continuando o diálogo entre as pesquisadoras e todos os estudantes, (continuação do Quadro 5).

Quadro 6: Diálogo entre estudantes e pesquisadoras, comportamento e características da função racional

Evento: XXIV Jornada de Pesquisa

(17) **Pesq. 02:** De que forma poderemos realizar o estudo acerca da existência ou não de f(2)?
(18) **Luísa:** Pega o $\frac{x^2-4}{x-2}$ aí você divide ele $\frac{(x-2).(x+2)}{(x-2)}$ e corta os termos iguais e vai dar 4.
(19) **Gustavo:** A gente não pode cortar porque vai estar alterando a função original, daí ela vai ser modificada *[referindo-se à fatoração e simplificação da função* $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$*, para* $x \neq 2$*].*
(20) **Pesq. 02:** Muito bem. A gente pode fazer isso quando?
(21) **Gustavo:** Só para achar o limite.
(22) **Pesq. 02:** Muito bem, isso mesmo.
(23) **Pesq. 01:** Então como é que a gente resolve aqui? *[chamando atenção para f(2), ou seja, qual o valor de y quando x = 2].*
(24) **Gustavo:** Você só substitui 2, e vê que dá 0/0, ai sabe que não tem o ponto, não existe, porque 0/0 não pode ser representado no gráfico.
(25) **Pesq. 02:** E sobre a função, o que podemos analisar nesta função?
(26) **Gustavo:** A gente analisa o ponto, tanto em cima quanto em baixo *[referindo-se ao numerador e ao denominador da função dada].*
(27) **Pesq. 02:** Mas o que é esse ponto? Como chamamos esse ponto?
(28) **Gustavo:** Não sei.
(29) **Pesq. 02:** O que precisamos analisar em uma função, tanto no numerador quanto no denominador? *[sem resposta, a outra pesquisadora continua].*
(30) **Pesq. 01:** Quando a gente faz o gráfico de uma função, o que a gente precisa observar na função para saber qual é o comportamento dela?
(31) **Gustavo:** Primeira coisa o grau dela.
(32) **Pesq. 01:** O que mais?
(33) **Gustavo:** O coeficiente angular dela, os sinais...
(34) **Pesq. 02** Isso vai dar o comportamento da função.
(35) **Pesq. 01:** O que mais? Eu posso atribuir qualquer valor para *x*?
(36) **Fernando:** Tem que avaliar o domínio e a imagem da função.
(37) **Pesq. 02:** Isso, a gente precisa avaliar o domínio. Então, na letra *d*, de que forma poderíamos realizar um estudo acerca da existência ou não de *f(2)*? Como podemos avaliar?
(38) **Fernando:** Pelo domínio.
(39) **Pesq. 01:** Vocês lembram o que é domínio?
(40) **Gustavo:** Domínio é o *x* da função.
(41) **Fernando:** Domínio são os valores de *x* e a imagem os valores de *y*.
(42) **Pesq. 01:** São os valores que a gente pode atribuir para a variável x. Então, essa divisão só é possível quando? *[apontando para a função da atividade proposta].*
(43) **Fernando:** Quando o *x* for diferente de 2.
(44) **Pesq. 02:** Isso. Para essa condição a gente pode simplificar a função.
(45) **Pesq. 01:** Então essa função tem uma restrição? O que isso significa?
(46) **Fernando:** São os valores do domínio onde não vai existir imagem para eles.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, quarto encontro, Integrantes de todos os grupos, 10/11/2016.

Percebe-se que até este momento os acadêmicos ainda não haviam mencionado sobre o estudo do domínio da função dada, o que indica a grande fragilidade dos estudantes quando se deparam com situações desse tipo, visto que o estudo do domínio seria um primeiro passo para tentar entender e compreender o restante das questões que foram propostas. Observa-se que os alunos constataram que *x = 2* não pertence ao domínio da função somente após obterem a divisão 0/0, o qual deveria ser uma primeira análise da função (estudo do domínio). Este fato talvez se justifique pela excessiva preocupação em relação à operacionalização de procedimentos algébricos ou numéricos e pela falta de rotina quanto à realização de uma análise conceitual preliminar da questão. Para além das representações semióticas, Vergnaud concebe a ação dos estudantes no enfrentamento de uma situação como sendo a fonte e o critério da conceitualização, sendo esta a essência do desenvolvimento cognitivo.

Pelo Quadro 6, percebemos que somente quando uma das pesquisadoras pergunta: "*Eu posso atribuir qualquer valor para x*?" (linha 35) é que um dos estudantes, Fernando, menciona a palavra domínio (linha 36). Isso pode indicar que os estudantes não conseguiram estabelecer um significado para tal conceito e, a partir desse momento, podem perceber a importância do estudo do domínio. Vergnaud salienta que o sentido é uma relação dos sujeitos com as situações e com os significantes (símbolos e signos) e que os esquemas evocados nos indivíduos por uma determinada situação, constituem o sentido dessa situação. Sendo assim, é possível identificar a fragilidade e dificuldade apresentada pelos estudantes em relação ao conceito de função e ao domínio da mesma, visto que não existe a imagem para o valor *x=2*, uma vez que este valor não pertence ao domínio da função.

Vemos, no Quadro 6, que a estudante Luísa (linha 18) não consegue empregar conceitos matemáticos para explicar o procedimento realizado, usando o registro da língua natural, como por exemplo usar a *fatoração* para *simplificar* a expressão algébrica dada, demonstrando um limite de mobilidade necessário para explicação/formulação, isto é, sem compreensão desses conceitos, pois apontam indícios, que não sabem as propriedades inerentes ao conceito em questão. A estudante consegue estabelecer um sentido, porém em um nível mais frágil de significação. Na sequência, Gustavo (linha 19) também sente dificuldade acerca da possibilidade de encontrar uma expressão algébrica equivalente a original, utilizando termos que não tem significado matemático, como por exemplo, "cortar" ao invés de simplificar a expressão. Isso indica como os estudantes apresentam dificuldades em utilizar a linguagem natural com significado matemático, e isso é essencial para a compreensão e entendimento do próprio conceito em questão, pois uma vez que o conceito não é significativo para o estudante, este acaba não tendo uma aprendizagem efetiva sobre tal conteúdo.

Salienta-se que para representar a função graficamente (como observamos na Figura 2) os estudantes não apresentaram dificuldades, realizaram atividades de tratamento e conversão, ou seja, o tratamento se configurou pelas transformações realizadas no registro algébrico, ao estabelecerem coordenadas numéricas a partir da representação da função. E a conversão, ao transformarem os registros de representação algébrica em um registro de representação figural ou gráfica.

Continuando o diálogo entre os estudantes e as pesquisadoras (continuação do Quadro 6) temos a seguinte interação.

Quadro 7: Diálogo entre estudantes e pesquisadoras, análise dos valores próximos de x=2

(47) **Pesq. 01:** A gente quer analisar a proximidade do ponto dois, por isso atribuímos valores próximos dele, analisando para qual valor a função está tendendo. Eu poderia ter pego outro valores como 10, 20, 30?
(48) **Gustavo:** Não, porque você quer analisar quando está perto de 2, quanto mais perto desse valor, mais precisa é a resposta.
(49) **Pesq. 01:** O que acontece no gráfico dessa função, no ponto x = 2?
(50) **Gustavo:** Ele fica uma bolinha aberta.
(51) **Pesq. 01:** E o que representa essa bolinha aberta?
(52) **Gustavo:** Descontinuidade.
(53) **Pesq. 01:** E a bolinha fechada?
(54) **Gustavo:** Um valor, que existe.
(55) **Pesq. 02:** Vocês lembram da definição de descontinuidade?
(56) **Tamara:** Sim.
(57) **Pesq. 02:** Quais são as condições para que uma função seja contínua?
(58) **Gustavo:** O ponto tem que estar definido, tem que existir limite e o ponto tem que ser igual ao limite.
(59) **Pesq. 01**: Muito bem! Então a função em questão é contínua ou não?
(60) **Fernando:** Não é contínua.
(61) **Pesq. 02:** Então, pode-se dizer que *f(x)* tende para algum valor à medida que *x* se aproxima de 2 tanto pela esquerda quanto pela direita?
(62) **Fernando:** Sim.
(63) **Pesq. 02:** De quanto?
(64) **Fernando:** De 4.
(65) **Renato:** O limite vai tender a 4, eu acho. Porque se colocar *x = 2* ele vai vim aqui na linha *[se referindo ao gráfico, que tem uma descontinuidade neste ponto]* e para, ele vai convergir mas não vai chegar. Vai tender a 4.
(66) **Luísa:** Mas o que é convergir?
(67) **Renato:** Acho que é a mesma coisa do tipo, vai tender a 4 só que não vai ser 4.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio, quarto encontro, Integrantes de todos os grupos, 10/11/2016.

Observa-se pelo Quadro 7, que os estudantes conseguiram atribuir sentido e se apropriar dos significados para o conceito de continuidade de uma função. Quando a pesquisadora questiona sobre o conceito de continuidade, isto é, como sabemos que uma função é contínua (linhas 55 e 57), o estudante Gustavo responde as três condições (linha 58), mostrando que uma determinada função *f* é contínua no número *a*, se e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas: 1) *f(a)* existe; 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e 3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em *a*, a função *f* será descontínua nesse ponto. Assim, os estudantes conseguem criar esquemas mentalmente e verbalmente, percebendo que a função dada não é continua (linha 60).

O estudante Gustavo (linha 48) enfatiza que quanto mais próximo do valor 2 substituímos na função, mais precisa é a resposta. O estudante estava se referindo aos valores infinitamente próximos do ponto x = 2 para analisar os limites laterais, o que é fundamental para o entendimento do conceito de Limite, estudado na disciplina de CDI - I.

Considerações Finais

A utilização de problemas e situações em ambientes educativos implica, na elaboração de representações pelos estudantes que proporcionam o desenvolvimento de esquemas, proposto por Vergnaud, no qual estes reproduzem a organização das representações semióticas extraídas da situação problema em questão, para então conduzir a sua resolução. Para Duval, essas representações são consideradas semióticas, pois através da interpretação, análise e organização das informações, os estudantes elaboram esquemas cognitivos para assim converter as representações, os dados apresentados no problema são transformados em significado e, por conseguinte, em significante, gerando assim a apropriação do conceito estudado.

Criamos um ambiente propício de interação entre os estudantes, ao propor a realização da situação problema em grupos, possibilitando dessa forma, que os diálogos e discussões entre eles também fosse um elemento importante no processo de aprendizagem. Entendemos que a discussão no grupo possibilita aos estudantes, um momento de troca de informações, de ideias, onde eles podem evidenciar, confrontar e justificar suas hipóteses individuais perante o grupo.

Constatamos que, somente após intervenções e questionamentos das pesquisadoras é que os estudantes conseguiram fazer análise nas proximidades do ponto $x = 2$, ou seja, valores a esquerda e a direta deste ponto (Quadros 5 e 6). Pelo Quadro 7, observamos que os estudantes apresentaram indícios de entendimento de que quando $x = 2$, para o caso dessa função racional, o valor da variável dependente (y) não existirá e que no registro gráfico teremos um ponto aberto (linha 50) representando assim uma descontinuidade (linha 52).

Ressaltamos que a ideia de aproximação e/ou tendência trabalhada na situação proposta, é um conceito inicial (informal) de Limite, isto é, descrever como uma função se comporta na medida em que sua variável independente se aproxima cada vez mais de um determinado valor, que neste caso foi em $x = 2$.

Referências

BATTISTI, Isabel Koltermann. *Mediações na significação do conceito vetor com tratamento da geometria analítica em aulas de matemática*. Tese de Doutorado (Educação nas Ciências), Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas, SP: Papirus, p. 11-34, 2. ed. 2005.

______. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

GROSSI, Esther Pillar. *Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais TCC*. Porto Alegre: GEEMPA, 2017.

MOREIRA, Marco Antonio. *A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área*. Porto Alegre: Investigações em Ensino de Ciências. v.7, n.1, p. 7-29, 2002.

Vergnaud, Gérard. La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, v. 10, n. 2, 3, p. 133-170, 1990.

______. Teoria dos Campos Conceituais. In: Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*, p. 1-26. Rio de Janeiro, 1993.

---

[1] A sequência de ensino foi elaborada, organizada e aplicada juntamente com a pesquisadora Eliane Miotto Kamphorst, colega do Doutorado.