Evento: XXVI Jornada de Pesquisa

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE MODELAGEM E OTIMIZAÇÃO: TEORIA E APLICAÇÕES DO MÉTODO DE MONTE CARLO[1]

MATHEMATICAL MODELING AND OPTIMIZATION METHODS: THEORY AND APPLICATIONS OF MONTE CARLO METHOD

Joelson Lopes da Paixão[2], Diomar A. Copetti Lima[3], Francisco Gasparin Fabrin[4], Gabriel Calvaitis Santana[5], Luciano Bonato Baldissera[6], Rodrigo Niederauer da Silva[7]

[1] Pesquisa desenvolvida no programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFSM, no Centro de Excelência em Energia e Sistemas de Potência (CEESP).
[2] Doutorando em Engenharia Elétrica - UFSM. E-mail: joelson.paixao@hotmail.com
[3] Doutorando em Engenharia Elétrica - UFSM. E-mail: diomarlima@gmail.com
[4] Mestrando em Engenharia Elétrica - UFSM. E-mail: engenheirofabrin@gmail.com
[5] Mestrando em Engenharia Elétrica - UFSM. E-mail: ro.dns@hotmail.com
[6] Doutorando em Engenharia Elétrica - UFSM. E-mail: lucianobonato@bol.com.br
[7] Mestrando em Engenharia Elétrica - UFSM. E-mail: gabriel_csantana@hotmail.com

RESUMO
O Método de Monte Carlo é um método de otimização que trabalha com números aleatórios de forma computacional para resolver problemas estatísticos de diversas áreas de conhecimento. Neste artigo será apresentado um pouco da origem deste método, os conceitos básicos de sua estrutura e alguns exemplos de aplicações nas diferentes áreas, de modo a esclarecer de forma sucinta as vantagens e desvantagens do uso desse método.

Palavras-chave: Análise estatística. Método de Monte Carlo. Eventos Discretos. Aleatoriedade.

ABSTRACT
The Monte Carlo Method is an optimization method that works with computationally random numbers to solve statistical problems in different areas of knowledge. In this article, a little of the origin of this method will be presented, the basic concepts of its structure and some examples of applications in different areas, in order to briefly clarify the advantages and disadvantages of using this method.

Keywords: Statistical analysis. Monte Carlo method. Discrete Events. Randomness.

INTRODUÇÃO

O Método de Monte Carlo (MMC) atualmente é utilizado em processos probabilísticos em diversas áreas de conhecimento, onde se tem a necessidade de simular o incerto, o inesperado, difundido nos programas geradores de números aleatórios. Como o uso desse método já era explorado a centenas de anos, por destacar-se pela semelhança com jogos de azar, onde eventos ocorrem de forma aleatória, onde Ulam e Von Neumann durante o Projeto de Manhattan na Segunda Guerra Mundial chamaram de Monte Carlo, menção a cidade de Mônaco, famosa pelos jogos de azar (GOTO, 2015).

Esse método pode ser considerado um método estatístico, gerando números pseudoaleatórios, pois esses números formam algoritmos numéricos, onde computadores geram esses números de forma binária, sendo inaptos a esses computadores a aleatoriedade verdadeira, por trabalharem de forma determinística, apresentam um arranjo de baixa qualidade, pois o número gerado depende do anterior e de um arranjo frequente, que por melhor que seja o algoritmo, logo após a sequência de todos os números possíveis terem sido apontados, a sequência irá se repetir. Dessa forma é diretamente proporcional a precisão quanto maior o número de pontos lançados, sendo um fator restritivo, mas muito adequado o método onde a precisão não seja tão necessária (SÓBOL; VEGA, 1983).

Os processos físicos descritos por equações diferenciais parciais ou ordinárias caracteristicamente conferem por simulações estatísticas , onde em muitas aplicações práticas do MMC é diretamente simulado, não descrevendo equações matemáticas para isso, onde a única condição é que o procedimento físico possa ser descrito por densidades de probabilidade (PDF, do inglês *probability density functions*), no qual aponta tal processo, que de mesmo modo o MMC é aplicado a transporte de radiação, sendo esse tipo de aplicação a natureza desse método, estimando determinadas quantidades e comportamentos de um enorme número de eventos únicos a serem observados (CONSTANTE-FLORES; ILLINDALA, 2019; GOTO, 2015).

Alguns exemplos de aplicação conhecidos corriqueiramente do MMC em diferentes áreas são desde a simulação de complexos fenômenos físicos a até econômicos, citando como exemplo: Atuária, finanças, computação gráfica, geologia, análise de projetos e jogos (SÓBOL; VEGA, 1983).

MÉTODO DE MONTE CARLO – MMC

O método de Monte Carlo é um procedimento numérico que utiliza números aleatórios para a obtenção de valores não necessariamente aleatórios, com base na Lei dos Grandes Números e no Teorema do Limite Central. Este método tem como princípio a geração de números aleatórios de qualquer distribuição de probabilidade com o objetivo de avaliar de forma numérica, indireta ou artificialmente um modelo matemático que permite estimar o comportamento de um sistema ou processo que envolve variáveis estocásticas.

O MMC apresenta inúmeras aplicações em muitos ramos da ciência, engenharia, negócios e outras áreas, apresentando muitas vantagens quando comparado a outros métodos, como a possibilidade de fornecer informações exatas por exemplo (existem alguns erros estatísticos, mas que podem ser minimizados) na modelagem de sistemas. De um modo geral, a modelagem de sistemas pode ser mais precisamente caracterizada através da Simulação de Monte Carlo do que por análise teórica. Geralmente, simulações de Monte Carlo (ou simulações computacionais em geral) são frequentemente utilizadas para a verificação da precisão e de intervalos de validade de modelos analíticos (SADIKU, 2009).

Uma das principais vantagens deste método, é que o método torna desnecessária a descrição das equações diferenciais que representam o modelo a ser analisado, sendo necessária apenas a determinação do modelo em função de densidade de distribuição de probabilidades (FDP). A partir destas distribuições, a simulação de Monte Carlo (SMC) pode efetuar amostragens aleatórias, repetindo este processo inúmeras vezes. Outra vantagem é que para a geração destes números aleatórios podem ser utilizados vários computadores operando paralelamente, possibilitando a geração de modelos muito próximos aos reais, pois a resolução do problema não fica obrigatoriamente vinculada a um único processador, o que aumenta a capacidade de processamento, e ao final, do processo possibilita a obtenção de um resultado final otimizado (BURBAN, 2008).

A ideia fundamental do MMC é baseada em um conceito estatístico simples, onde a partir de uma variável x com distribuição aleatória própria e representada por uma função de distribuição de probabilidades f(x), e por uma função cumulativa de probabilidades F(x), define-se uma nova variável aleatória y, que tem uma distribuição uniforme sobre o intervalo fechado de (0 a 1). Assim, determina-se uma relação entre a variável x e a variável y, considerando y=F(x). Como a função cumulativa de propriedades representa as características aleatórias da variável em questão, a função y=F(x) é uma função entre duas variáveis: a variável x, com distribuição aleatória própria, e a variável y, com distribuição uniforme entre 0 e 1 (SÓBOL; VEGA, 1983).

De um modo geral, o MMC baseia-se em dois passos:

- Primeiro, dada a função cumulativa de probabilidades da variável em simulação F(x), toma-se um número gerado aleatoriamente nos intervalos de (0,1) ou (0 a 100).
- Usando a função cumulativa de probabilidades, determina-se o valor da variável x que corresponde ao número aleatório gerado.

Para exemplificar o processo genérico que idealiza o Método de Monte Carlo, podemos considerar uma aplicação prática. Considere uma distribuição de Poisson, que na teoria da probabilidade e na estatística, é uma distribuição de probabilidades de variáveis aleatórias discretas, as quais expressam a probabilidade de uma série de eventos ocorrerem num certo período de tempo se estes eventos ocorrem independentemente de quando ocorreu o último evento. Baseado neste conceito, vamos considerar que a média de vendas em um turno de trabalho de 10 horas de uma loja de automóveis seja 2 carros por hora, supondo que a distribuição das probabilidades das vendas por hora siga a curva de distribuição de Poisson (SÓBOL; VEGA, 1983).

Assim, para calcularmos a probabilidade de uma distribuição de Poisson, devemos utilizar a seguinte função de probabilidade:

$$P(x=k)=\frac{e^{-u}u^{k}}{k!}! \text{ u>0 e k=0,1, 2...} \quad (1)$$

Considerando a média de vendas u=2, e as probabilidades de vendas de carros por hora como k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 e 10, através da equação podemos determinar a probabilidade existente de cada quantidade de vendas por hora acontecer. Para isto é necessário o cálculo individual de cada probabilidade através da equação, considerando as 11 situações. Os valores calculados estão apresentados na Tabela 1, onde na primeira coluna são apresentados os valores possíveis de vendas por hora, e na segunda coluna as probabilidades de cada valor acontecer. Na terceira coluna da tabela é apresentada a distribuição cumulativa de probabilidades, e ao lado é apresentado um gráfico com os valores (ANDRADE, 2004).

Tabela 1 – Funções de probabilidade da variável x.

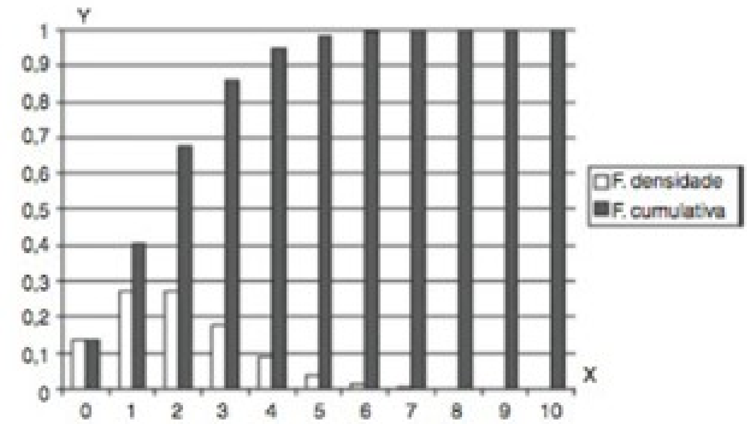
Valor da variável aleatório	**Função densidade de probabilidade**	**Função cumulativa de probabilidade**
0	0,1353	0,1353
1	0,2706	0,4059
2	0,2706	0,6765
3	0,1804	0,8569

Valor da variável aleatório	Função densidade de probabilidade	Função cumulativa de probabilidade
4	0,0902	0,9471
5	0,036	0,9831
6	0,012	0,9951
7	0,0034	0,9985
8	0,0008	0,9993
9	0,0002	0,9995
10	0,0001	0,9996

Fonte: Adaptado de (ANDRADE, 2004).

A partir destes valores é possível a construção de um gráfico, considerando os valores das probabilidades de ocorrência dos valores das vendas, e as probabilidades acumuladas. Na Figura 1 são apresentados os valores na forma de gráfico, onde as barras escuras representam a frequência acumulada (*F(x)*) e as barras claras representam a frequência de distribuição de probabilidades (*f(x)*), para cada valor de *x*. A frequência total acumulada, para cada ponto (valor de *x*), é dada pela soma da frequência de ocorrência da variável com a frequência acumulada no ponto anterior (SADIKU, 2009).

Figura 1 – Funções de probabilidade da variável x.



Fonte: Adaptado de (ANDRADE, 2004).

No gráfico, para exemplificar o processo de simulação de Monte Carlo, vamos considerar que o sorteio corresponde à variável aleatória *y=F(x),* foi de 0,65, o que corresponde a 2 carros vendidos, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Representação do MMC no exemplo apresentado.

Fonte: Adaptado de (ANDRADE, 2004).

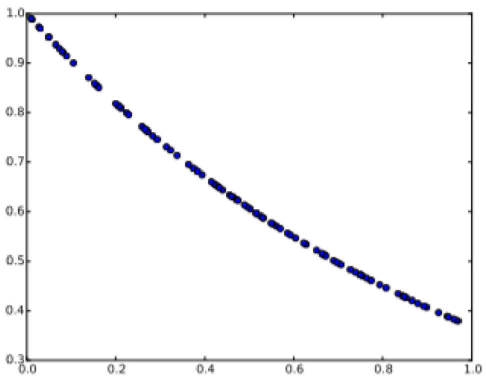
Portanto, a expectativa de encontrar o número 2 é dada pela amplitude da barra clara da figura 1, que corresponde a uma probabilidade ocorrência de 0,2706 ou 27,06% na simulação. Assim, basicamente a Simulação de Monte Carlo consiste na geração de números aleatórios a partir de qualquer distribuição de probabilidade ou processo estocástico, estimando seu comportamento, sem a necessidade de conhecimento do modelo estudado. Na prática, quando utilizada a simulação, geralmente uma ou mais variáveis de interesse passam por experimentos a fim de avaliar seu efeito sobre outras variáveis de interesse (ZAPATA, 2010).

O que se deve observar é que na aplicação do Método de Monte Carlo, como citado, inicialmente é necessária a geração de sequências de números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo [0,1]. Diante disto, a qualidade dos resultados obtidos está diretamente ligada à qualidade da aleatoriedade dos números dessas sequências. Caso o processo utilizado na geração dos números aleatórios tenha vícios, tendendo a certos valores, o processo de simulação apresentará erros, não tornando possível a aplicação do método, ou gerando resultados insatisfatórios. Geralmente as sequências de valores são geradas por geradores de números aleatórios. A confiabilidade na aleatoriedade desses geradores é extremamente importante para a obtenção de bons resultados com as simulações (ANDRADE; TORQUATO; FREITAS, 2015; FILETI, 2016).

Além disso, o número de interações pode influenciar no resultado obtido. Dependendo da complexidade do modelo, uma quantidade pequena de números aleatórios gerados pode ocasionar um erro elevado, tornando o processo não satisfatório. Um exemplo é apresentado na

Figura 3, onde é utilizada a simulação de Monte Carlo para resolução de integrais. Neste caso, o autor utilizou o MMC para a resolução da função $f1(x) = e^{-x}, x \in [0, 1]$, gerando primeiramente com 100 interações, e após com 1258 interações (PAULA, 2014).

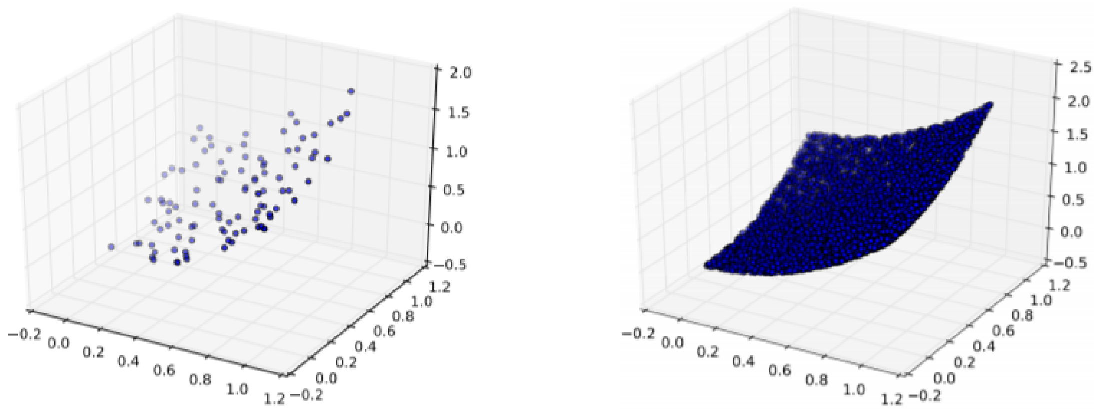
Figura 3 – Função f1(x) solucionada através de 100 interações (dir) e 1258 interações (esq).



Fonte: Adaptado de (PAULA, 2014).

Percebe-se que um aumento significativo de interações não altera significativamente o comportamento do gráfico obtido, em função de ser um sistema simples. Entretanto, quando é utilizado o método em sistemas mais complexos, a quantidade de interações pode ser crucial na obtenção de um resultado considerado satisfatório. O mesmo autor apresenta como exemplo a construção de um gráfico através do MMC para a função $f2(x, y) = x^2 + y^2, x, y \in [0,1]$, gerado com N=100 e N=6784, o qual é apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Função f2(x, y) solucionada através de 100 interações (dir) e 6784 interações (esq).



Fonte: Adaptado de (PAULA, 2014).

Nota-se que neste caso existe uma diferença entre o obtido com 100 interações e o obtido com 6784 interações que compromete a confiabilidade do método. Na Tabela 2, são apresentados os valores referentes a solução analítica e os valores obtidos através da aplicação do MMC, com os seus respectivos erros absolutos em cada uma das situações.

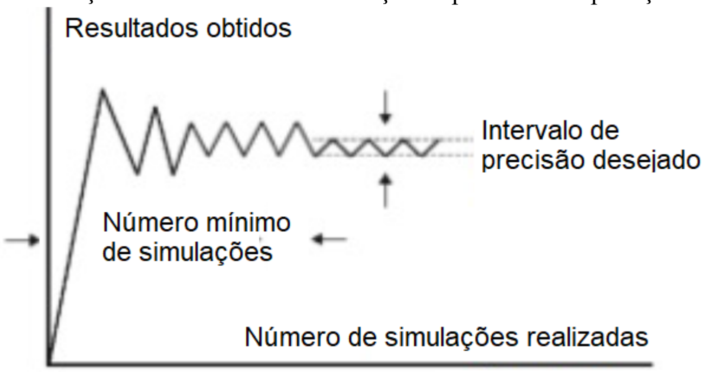
Tabela 2 – Funções de probabilidade da variável X.

Integral	Solução Analítica	$N = 100$		Número de simulações controlado (N)		
		Solução MC	Erro Absoluto	Solução MC	Erro Absoluto	N
$\int_0^1 e^{-x}dx$	0.63212	0.63305	0.00093	0.63316	0.00104	1258
$\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)dxdy$	0.66667	0.66879	0.00213	0.66461	0.00205	6784

Fonte: Adaptado de (PAULA, 2014).

Constata-se que quanto mais complexo o sistema, maior é o erro para um determinado número de interações. Partindo desta ideia, podemos afirmar que na aplicação do MMC, quanto maior o número de interações melhor, pois mais fielmente será o resultado obtido. Entretanto, obviamente existe uma limitação no número de interações, decorrentes da capacidade de processamento ou mesmo do tempo total de simulação, o que faz com que seja necessária uma estimativa prévia do número mínimo de simulações necessário.

Figura 5 – Relação entre número de simulações e precisão na aplicação do MMC.



Fonte: Adaptado de (BURBAN, 2008).

Assim, se um número suficiente de ensaios de simulação é considerado, então a probabilidade de um determinado evento ocorrer pode ser calculada com um alto nível de precisão (BURBAN, 2008). A Simulação de Monte Carlo deve ser realizada várias vezes para que se chegue a uma estabilidade do experimento e reduza-se o erro entre os valores simulados e os reais (ZAPATA, 2010). Um pequeno número de rodadas de simulação pode levar a resultados muito discrepantes dos dados originais (ANDRADE; TORQUATO; FREITAS, 2015).

Pode-se também melhorar a precisão dos resultados obtidos com a utilização do MMC através das técnicas de redução de variância, as quais são procedimentos que visam a otimização dos resultados obtidos através da diminuição do desvio padrão da amostra. Dentre estas técnicas, pode-se citar o método das Variáveis Antitéticas, o método das Variáveis de Controle, a técnica da Amostragem Estratificada, Hipercubo Latino, Amostragem por Importância, etc... (LIMA; SAMANEZ, 2010).

Além destas técnicas, atualmente existem muitas alternativas de simulação baseadas no Método de Monte Carlo, que nada mais nada menos são variações do método original. Alguns exemplos de variações do método encontradas em várias aplicações são o Algoritmo de Metrópolis, Monte Carlo Quântico, Monte Carlo Reverso, dentre vários outros (ANDRADE, 2004).

APLICAÇÕES DO MÉTODO DE MONTE CARLO NA LITERATURA

Em relação a aplicação do MMC, constata-se uma vasta utilização em temas relacionados com as mais diferentes áreas. Podemos citar como exemplo o trabalho elaborado por García-Alonso, Arenas-Arroyo e Pérez-Alcalá (2012), os quais projetaram um sistema de computador baseado em simulação de Monte-Carlo e lógica Fuzzy, com visando a identificação de variáveis que possuem influência em remessas de mercadorias recebidas por um determinado país e explicar o seu comportamento ao longo do tempo em determinado período (GARCÍA-ALONSO; ARENAS-ARROYO; PÉREZ-ALCALÁ, 2012).

Mais especificamente na área da geração de energia elétrica, pode-se citar o método probabilístico criado por Mokryani e Siano (2013), o qual foi utilizado para avaliar o impacto da integração de turbinas eólicas nos sistemas elétricos de distribuição. Combinando a

Simulação de Monte Carlo e simulando a demanda tomando como base dados reais, foi possível otimizar o fluxo de potência nas redes, considerando diferentes combinações de demanda e geração de vento ao longo de um ano (MOKRYANI; SIANO, 2013). Na mesma linha, Arnold e Yildiz (2015) realizaram uma abordagem sobre Simulação de Monte Carlo para análise de risco com base em uma representação de todo o ciclo de vida de projetos de investimento em tecnologias de energias renováveis (ARNOLD; YILDIZ, 2015).

Saindo da área da elétrica, mais especificamente na área de transportes, têm-se o trabalho apresentado por Salling e Leleur (2015), os quais apresentaram um modelo baseado em análise quantitativa de risco, simulação de Monte Carlo e análise convencional de custo-benefício, convertendo relações determinísticas de custo-benefício em resultados de intervalo estocásticos com propósito de avaliar as imprecisões de estimativas de demandas e dispêndio em projetos de infraestrutura de transportes (SALLING; LELEUR, 2015).

Na área da indústria, Li et al. (2016) desenvolveram um modelo com base em simulação de Monte Carlo para capturar com precisão o comportamento estocástico e dinâmico de um sistema de manufatura. O método proposto foi aplicado a um sistema de fabricação de semicondutores para demonstrar a qualidade da avaliação deste modelo e os resultados da otimização do plano de produção. Como se pode perceber são diversas as aplicações do Método de Monte Carlo, atendendo áreas distintas e com problemas distintos. Essa versatilidade vem a justificar o seu amplo uso em todas as áreas (LI et al., 2016).

EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MÉTODO DE MONTE CARLO

Como o método de Monte Carlo geralmente envolve o uso de alguma distribuição de probabilidades e o uso de uma amostra obtida para aproximar a função de interesse, uma das primeiras aplicações do método foi relacionada ao cálculo de integrais. Basicamente a ideia do método era escrever uma integral como um valor esperado. Atualmente o Método de Monte Carlo é aplicado em diversas áreas, como na área de finanças, na engenharia, na gestão empresas, na análise de problemas logísticos, na área da biologia, sendo por exemplo usado em sistemas de tratamento de câncer, ou mesmo em infecções pelo HIV. Além disto, o método apresenta inúmeras aplicações na Física, Química e Medicina (YORIYAZ, 2009; ZAPATA, 2010).

Essa grande utilização se deve às suas aplicabilidades de forma eficaz e relativamente simples, quando comparada a outros métodos. De um modo geral a simulação de Monte Carlo oferece várias vantagens em comparação a outros métodos semelhantes. Dentre estas vantagens podemos citar:

- Distribuições das variáveis do modelo não precisam ser aproximadas;
- Correlações e outras interdependências podem ser modeladas;
- O computador realiza todo trabalho de geração dos valores aleatórios;
- O nível de precisão da simulação pode ser melhorado através de um simples aumento do número de interações calculadas;
- A validade da teoria da simulação de Monte Carlo é amplamente reconhecida, o que permite que seus resultados sejam facilmente aceitos;
- Alterações no modelo podem ser feitas rapidamente e os novos resultados podem ser comparados com os anteriores.

É possível citar vários exemplos como demonstração da utilização do MMC, os quais podem ir de simples problemas a até a modelos extremamente complexos. Obviamente que quanto mais complexo é o sistema, maior será a necessidade do uso de técnicas alternativas, de forma a complementar o uso do MMC. Como o objetivo deste artigo é proporcionar um entendimento básico do método, será apresentado um exemplo de aplicação bem simples, utilizado para a determinação de uma probabilidade.

O exemplo de utilizado para a demonstração da aplicação do MMC a ser considerado será a determinação da probabilidade de um número 7 ser obtido, através do lançamento de dois dados tradicionais de 6 lados, D1 e D2. Inicia-se com a condição de que os valores possíveis de serem obtidos com cada um dos dados são números inteiros, de 1 a 6, os quais possuem igual probabilidade de ocorrência, apresentando as combinações conforme a Tabela 3.

Tabela 3 – Possíveis valores a serem obtidos com o lançamento de 2 dados.

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

As incertezas envolvidas neste processo estão relacionadas ao valor que cada dado apresentará ao ser jogado. Os valores que podem ser assumidos por cada incerteza são os números inteiros de 1 a 6, com igual probabilidade de ocorrência de cada número, pois são dados idôneos. Assim, a função de densidade de distribuição de probabilidades irá tender a estes valores. Se gerados valores pseudoaleatórios, relacionados a função densidade de distribuição de probabilidades, estes representarão o comportamento dos valores obtidos através do lançamento dos dados, ou seja, quaisquer dois valores inteiros entre 1 e 6.

Com isto, o resultado final é dado pela soma do resultado obtidos com o lançamento dos dois dados, o que corresponde a qualquer valor entre 2 e 12. Como o objetivo é encontrar a probabilidade de ser obtido o número 7, caso seja atingido este valor, considera-se um resultado positivo na observação, caso seja obtido quaisquer outros valores, considera-se um resultado negativo. Assim, se gerarmos números aleatórios, repetidas vezes, e registrarmos os resultados obtidos conforme apresentado na Figura 6, podemos obter uma amostra relativamente grande, com "n" iterações.

Figura 6 – Geração de amostras através da geração de números aleatórios.

D1	D2	Resultado
1	6	$1 + 6 = 7$
6	1	$6 + 1 = 7$
2	5	$2 + 5 = 7$
5	2	$5 + 2 = 7$
3	4	$3 + 4 = 7$
4	3	$4 + 3 = 7$
⋮	⋮	⋮

Número de amostras

Assim, com esta amostra, é possível a obtenção de quantas vezes foram encontradas o número 7, e a partir deste número de vezes, se dividirmos pelo tamanho da amostra gerada, é possível a obtenção da probabilidade de se encontrar o número 7 nas jogadas realizadas com estes dados. Quanto maior o número de jogadas simuladas ou iterações, maior é a aproximação da probabilidade obtida em relação ao sistema real. Vamos supor que no exemplo foram efetuadas 200 gerações de números aleatórios, nas quais em 30 vezes foi obtido o número 7 através das combinações destes números. A partir destes valores, é possível de se determinar que a probabilidade de ser obtido o número 7 com estes dados é de 15%.

Obviamente se efetuarmos uma nova simulação este valor pode sofrer variações, entretanto, quando maior o número de interações realizadas, menor será a variabilidade do resultado final. Observa-se que ao final do procedimento, o objetivo foi alcançado: estimar a probabilidade de ocorrência do número 7, entretanto, nota-se que não foi necessária a modelagem do processo, o que é uma das principais vantagens do Método de Monte Carlo.

Apesar de simples, o problema apresentado serve para exemplificar o processo de aplicação do MMC, e tornar evidente que o esforço computacional envolvido está diretamente relacionado ao tamanho da amostra (quantidade de interações realizadas) que, por sua vez, está diretamente relacionada ao erro obtido com o resultado final. Desta forma, percebe-se que quanto menor o erro desejado, maior será o esforço computacional necessário para aplicação do método (BURBAN, 2008).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método de Monte Carlo é uma técnica alternativa promissora para estimar um valor esperado. A ideia é estimar a distribuição de uma estatística extraindo amostras aleatórias de uma população e observar o comportamento da estatística sobre as amostras.

A grande diferença é que, em simulação, ao contrário de um experimento “real”, as regras podem ser mudadas e, ainda assim, resultados realistas serem obtidos. Técnicas de redução de variância são artifícios matemáticos que são introduzidos no processo de amostragem e modificam essas “regras” com o intuito de reduzir o tempo de processamento computacional e, ao mesmo tempo, obter resultados realistas, compensando de alguma forma as mudanças introduzidas.

Além do mais, a flexibilidade e a variedade de opções de simulação permitem que fenômenos físicos sejam "ligados" ou "desligados" para quantificar suas influências no fenômeno observado. Esses recursos fazem com que o método se torne extremamente útil em análises do comportamento individual de cada tipo de evento dentro de um processo como um todo, algo que seria impossível num experimento real, abrindo uma infinidade de possibilidades e experimentos teóricos cujo limite é a imaginação. Quando aplicada a problemas reais, a SMC pode requerer robusta infraestrutura computacional para alcançar um erro de aproximação satisfatório, o que muitas vezes impede sua utilização.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, E. L. DE. **Introdução à pesquisa operacional: métodos e modelos para análise de decisões**. LTC, [s.l.] 2004.

ANDRADE, J.; TORQUATO, R.; FREITAS, W. A Granular Monte Carlo Based Methodology to Estimate PV Generation Impacts on the Utility Long-Term Energy Planning. **2015 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Latin America (ISGT LATAM)**, p. 1–6, 2015.

ARNOLD, U.; YILDIZ, Ö. Economic risk analysis of decentralized renewable energy infrastructures - A Monte Carlo Simulation approach. **Renewable Energy**, v. 77, n. 1, p. 227–239, 1 maio 2015. D.O.I.:10.1016/J.RENENE.2014.11.059

BURBAN, P. A. C. **APREÇAMENTO DE OPÇÕES EXÓTICAS: UMA ABORDAGEM PELA SIMULAÇÃO DE MONTE-CARLO**. PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO, Rio de Janeiro, Brazil, 18 abr. 2008.

CONSTANTE-FLORES, G. E.; ILLINDALA, M. S. Data-Driven Probabilistic Power Flow Analysis for a Distribution System With Renewable Energy Sources Using Monte Carlo Simulation. **IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRY APPLICATIONS**, v. 55, n. 1, p. 174–181, 2019. D.O.I.:10.1109/TIA.2018.2867332

FILETI, E. E. Implementação e aplicações do método Monte Carlo Reverso para líquidos homogêneos. 20 dez. 2016. D.O.I.:10.11606/D.43.2016.TDE-29112016-114151

GARCÍA-ALONSO, C. R.; ARENAS-ARROYO, E.; PÉREZ-ALCALÁ, G. M. A macroeconomic model to forecast remittances based on Monte-Carlo simulation and artificial intelligence. 2012. D.O.I.:10.1016/j.eswa.2012.01.108

GOTO, M. Método de Monte Carlo. . 2015, p. 5.

LI, M. et al. A metamodel-based Monte Carlo simulation approach for responsive production planning of manufacturing systems. **Journal of Manufacturing Systems**, v. 38, p. 114–133, 2016. D.O.I.:10.1016/J.JMSY.2015.11.004

LIMA, U. S. M. DE; SAMANEZ, C. P. Avaliação de derivativos complexos: uma aplicação do método de simulação dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo com diversas bases polinomiais. **Revista Gestão da Produção Operações e Sistemas**, v. 0, n. 4, p. 47, 10 mar. 2010. D.O.I.:10.15675/gepros.v0i4.886

MOKRYANI, G.; SIANO, P. Evaluating the integration of wind power into distribution networks by using Monte Carlo simulation. **International Journal of Electrical Power and Energy Systems**, v. 53, n. 1, p. 244–255, 2013. D.O.I.:10.1016/J.IJEPES.2013.04.019

PAULA, R. R. DE. **Método de Monte Carlo e Aplicações**. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/bitstream/1/4180/1/RenatoRicardoDePaula 2014-2.PDF>. Acesso em: 7 jul. 2021.

SADIKU, M. N. O. MONTE CARLO METHODS FOR ELECTROMAGNETICS. 2009.

SALLING, K. B.; LELEUR, S. Accounting for the inaccuracies in demand forecasts and construction cost estimations in transport project evaluation. **Transport Policy**, v. 38, p. 8–18, 1 fev. 2015. D.O.I.:10.1016/J.TRANPOL.2014.11.006

SÓBOL, I. M.; VEGA, C. **Método de Montecarlo**. Mir, [s.l.] 1983.

YORIYAZ, H. Método de Monte Carlo: princípios e aplicações em Física Médica. **Revista Brasileira de Física Médica**, v. 3, n. 1, p. 141–149, 2009. D.O.I.:10.29384/RBFM.2009.V3.N1.P141-149

ZAPATA, C. J. **Análisis Probabilístico y Simulación**. 1. ed. UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA, Pereira, 2010.