



## ANÁLISE COMPUTACIONAL DE SISTEMAS ELÉTRICOS UTILIZANDO MÉTODOS NUMÉRICOS<sup>1</sup>

Henrique Kronbauer Fischer<sup>2</sup>, Gabriel Kommers da Silva<sup>3</sup>, Manuel Osorio Binelo<sup>4</sup>,  
Maurício de Campos<sup>5</sup>, Paulo Sérgio Sausen<sup>6</sup>

<sup>1</sup> Artigo científico desenvolvido para as disciplinas de Modelagem Matemática e Cálculo Numérico do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, na UNIJUÍ.

<sup>2</sup> Estudante do Curso de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, UNIJUÍ;

<sup>3</sup> Estudante do Curso de Mestrado, UFSM;

<sup>4</sup> Professor do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional – UNIJUÍ;

<sup>5</sup> Professor Pesquisador do Grupo de Automação Industrial e Controle – GAIC – UNIJUÍ;

<sup>6</sup> Professor Pesquisador do Grupo de Automação Industrial e Controle – GAIC – UNIJUÍ.

### RESUMO

O uso dos métodos numéricos para resolução de sistemas lineares tem um objetivo muito importante em várias áreas do conhecimento, especialmente em sistemas elétricos. Resolver sistemas lineares é uma tarefa tão fundamental na engenharia elétrica que muitos dos problemas encontrados neste campo podem ser formulados como sistemas de equações lineares complexos. Esses sistemas podem ser formados por circuitos elétricos, redes de distribuição, sistemas de controle e muitos outros cenários. Neste trabalho foram definidos dois sistemas elétricos, um sistema de 4 barramentos e um de 10 barramentos, através da geração das matrizes de admitância dos dois sistemas, torna-se possível a utilização de métodos numéricos. Definiu-se como objetivo a análise da precisão dos resultados encontrados através dos métodos numéricos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel, e para a simulação computacional das rotinas de cálculo foi utilizado o *software* Matlab. Após a análise dos resultados encontrados, define-se que o método de Gauss Seidel converge mais rapidamente e com melhor exatidão nos resultados.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos. Sistemas Elétricos. Matlab. Gauss Seidel. Gauss Jacobi.

### ABSTRACT

The use of numerical methods for solving linear systems has a very important objective in several areas of knowledge, especially in electrical systems. Solving linear systems is such a fundamental task in electrical engineering that many of the problems encountered in this field can be formulated as systems of complex linear equations. These systems can be formed by electrical circuits, distribution networks, control systems and many other scenarios. In this work two electrical systems were defined, a system with 4 buses and one with 10 buses, through the generation of the admittance matrices of the two systems, it becomes possible to use numerical methods. The objective was to analyze the precision of the results found through the numerical methods of Gauss Jacobi and Gauss Seidel, and for the computational simulation of the calculation routines the Matlab software was used. After analyzing the results found, it is defined that the Gauss Seidel method converges faster and with better accuracy in the results.

**Keywords:** Numerical methods. Electrical Systems. Matlab. Gauss Seidel. Gauss Jacobi.



## INTRODUÇÃO

A utilização de métodos numéricos na maior parte das vezes ocorre devido que na prática os sistemas elétricos podem se tornar extremamente grandes e complexos, deixando a análise analítica muitas vezes inviável. Outro fator é que sistemas com elementos não lineares ou com múltiplas variáveis dificultam ou mesmo impossibilitam a obtenção de soluções analíticas diretas. Nesses casos entram os métodos numéricos, onde os mesmos fornecem técnicas específicas para a resolução das soluções lineares com eficácia.

Dessa forma os métodos numéricos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel, que são aplicados neste trabalho, são muito utilizados para resolução de sistemas elétricos. Permitindo a modelagem matemática, a simulação computacional e otimização de determinados sistemas elétricos complexos, possibilitando aos pesquisadores a análise do comportamento desses sistemas, elaborar soluções eficazes e adotar medidas quando preciso.

## METODOLOGIA

Para a análise do fluxo de potência em um sistema elétrico, busca-se descobrir o atual estado da rede, incluindo a distribuição dos fluxos e outras variáveis de relevância. Em um sistema elétrico, os componentes são conectados de duas maneiras: primeiro entre barramentos e segundo entre barramentos de referência e um barramento qualquer. Os gerados e as cargas são considerados partes externas e são utilizados como se fornecessem energia constante ao barramento da rede. O restante da rede, parte interna, é formada pelos outros componentes e é considerada como uma série de circuitos passivos e modelado usando uma matriz de admitância de barramento (MONTICELLI, 1983).

Em um sistema elétrico o fluxo da potência ativa é relativamente proporcional à abertura angular e este percorre no sistema no sentido dos ângulos maiores para os ângulos menores. A relação entre a potência do sistema e a abertura do ângulo é a mesma que entre a corrente e a queda de tensão em um circuito CC (corrente contínua). Esta característica permite a elaboração de um modelo similar denominado fluxo de carga CC, possibilitando assim avaliar o fluxo de potência ativa em um sistema elétrico qualquer (MONTICELLI, 1983).



O fluxo de potência  $P_{km}$  em um sistema elétrico de potência pode ser obtido através de:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} - V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (1)$$

onde  $km$  são respectivamente os pontos das barras  $k$  e  $m$

O fluxo no final da linha é obtido através de:

$$P_{km} = V_k^2 g_{km} - V_k V_m g_{km} \cos \theta_{km} + V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (2)$$

As perdas de transmissão nas linhas são obtidas por:

$$P_{km} + P_{mk} = g_{km} (V_k^2 + V_m^2 - 2V_k V_m \cos \theta_{km}) \quad (3)$$

Desprezando as perdas nos termos de  $P_{km}$  e  $P_{mk}$ , define-se:

$$P_{km} = -P_{mk} = -V_k V_m b_{km} \sin \theta_{km} \quad (4)$$

Realizando as seguintes definições:

$$V_k \cong V_m \cong 1 \text{ pu},$$

$$\sin \theta_k \cong \theta_k,$$

$$b_{km} \cong -\frac{1}{x_{km}}.$$

Nesse sentido o fluxo  $P_{km}$  pode ser definido como:

$$P_{km} = x_{km}^{-1} \theta_{km} = \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}} \quad (5)$$

A equação (5) ainda pode ser reescrita como:

$$P_k = \left( \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \right) \theta_k + \sum_{m \in \Omega_k} (-x_{km}^{-1} \theta_m) \quad (6)$$

E na forma matricial em (7):

$$P = B\theta \quad (7)$$

onde  $B$  é a matriz admitância do sistema em estudo e esta representado em (8):

$$B_{km} = -x_{km}^{-1} \quad B_{kk} = \sum_{m \in \Omega_k} x_{km}^{-1} \quad (8)$$

## METODOLOGIAS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Para o estudo do comportamento dos sistemas realizados através da análise do fluxo de potência, inúmeros métodos numéricos possuem os mecanismos necessários para resolução desses sistemas. Entre eles citam-se os métodos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel, que serão utilizados neste trabalho.



Os sistemas lineares podem ser descritos como um conjunto de  $m$  equações lineares com  $n$  incógnitas (HOFFMAN e KUNZE, 2004):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $a_{ij}$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j=1, \dots, n$ ,  $b_i$ ,  $i=1, \dots, m$  são constantes e  $x_j$ ,  $j=1, \dots, n$  são as incógnitas.

Desta forma o sistema (1) pode ser reescrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \leftrightarrow Ax=b \quad (10)$$

onde  $A = [a_{ij}]$  é uma matriz de dimensão  $(m \times n)$ ,  $x = [x_i]$  é um vetor de dimensão  $(n \times 1)$  e  $b = [b_i]$  é um vetor de dimensão  $(m \times 1)$ .

Segundo Hoffman e Kunze, os sistemas lineares podem ser definidos com as seguintes classificações: possível e determinado, possível e indeterminado e impossível, se tiverem respectivamente uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução.

## MÉTODOS DE GAUSS JACOBI E GAUSS SEIDEL

Seja  $Ax=b$  um sistema linear. Sendo que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e que os elementos  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i=1, \dots, n$ , o método de Gauss-Jacobi pode ser representado como:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) / a_{11}, \\ x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) / a_{22}, \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) / a_{nn}. \end{aligned} \quad (11)$$

O método de Gauss Seidel é muito parecido com o de Gauss Jacobi, no entanto nesse ao se calcular o  $x_i^{(k+1)}$ , utilizam-se todas as avaliações  $x_j^{(k+1)}$ ,  $j < i$ , calculadas na iteração seguinte. Sendo  $Ax=b$  um sistema linear, podemos assumir que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e que seus elementos são  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i=1, \dots, n$  (MORAIS; SILVA; SILVA, 2020). O método de Gauss Seidel pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) / a_{11}, \\x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) / a_{22}, \\&\vdots \\x_n^{(k+1)} &= (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k)} \dots - a_{nn}x_n^{(k)}) / a_{nn}.\end{aligned}\tag{12}$$

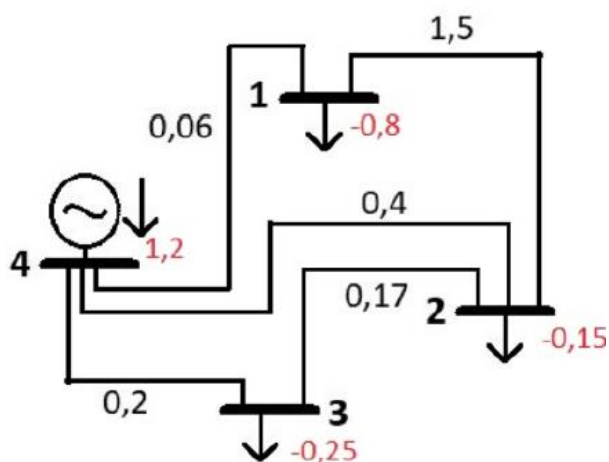
Conforme cada novo valor de  $x$  é computado pelo método de Gauss Seidel, este é utilizado de imediato na próxima rotina de cálculo para determinar um novo valor para  $x$ . Desse modo se a solução estiver convergindo para o esperado, a melhor aferição disponível será utilizada. Já o método de Gauss Jacobi utiliza uma metodologia um pouco diferente, ao invés de utilizar os últimos valores de  $x$  encontrados, esta utiliza outro método para calcular um conjunto com novos  $x$  tendo em vista o conjunto de antigos  $x$ . Por isso, à medida que novos valores são encontrados, estes não são utilizados de imediato, mas sim armazenados para o próximo *loop* de iteração. Mesmo que em alguns casos o método de Gauss Jacobi seja benéfico, o uso das melhores convergências do método de Gauss Seidel, na maioria dos casos o torna escolhido (CHAPRA; CANALE, 2016).

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para análise dos métodos numéricos, foram selecionados dois sistemas elétricos com diferentes dimensões para investigar se o tamanho dos sistemas pode afetar nos resultados dos métodos utilizados.

Para a primeira análise do fluxo de potência definiu-se um sistema elétrico de 4 barras que está definido na Figura 1, de acordo com a equação (8) apresentada anteriormente torna-se possível gerar uma matriz de admitância, resultando em uma matriz 4x4. Definimos a barra 4 como barramento de referência, o que implica que o  $\theta_4 = 0$ , dessa forma descarta-se a linha 4 e coluna 4 da matriz admitância encontrada, formando uma matriz final 3x3. Utilizando a equação (7) gerou-se o sistema a ser analisado que está representado na Figura 2.

Figura 1 - Sistema Elétrico de 4 barramentos



Fonte: (NASCIMENTO; RAMOS; LORETO, 2018).

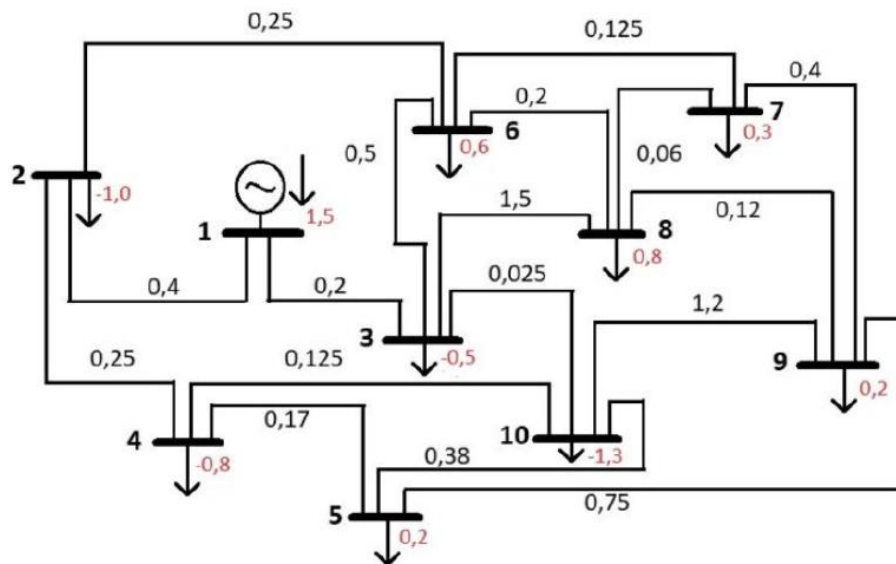
Figura 2 - Sistema linear para o sistema de 4 barramentos

$$\begin{bmatrix} 17,333333 & -0,666666 & 0 \\ -0,666666 & 9,04902 & -5,882353 \\ 0 & -5,882353 & 10,882353 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,15 \\ -0,25 \end{bmatrix}$$

Fonte: (NASCIMENTO; RAMOS; LORETO, 2018).

O segundo sistema definido foi um sistema elétrico de 10 barras, que está definido na Figura 3, onde foi realizado um processo semelhante ao anterior. Primeiramente encontrou-se a matriz admitância através da equação (8), obtendo-se assim uma matriz 10x10. O barramento definido como de referência foi o barramento 1, dessa forma podemos supor que  $\theta_1 = 0$ , e sendo assim a linha 1 e coluna 1 podem ser ignoradas resultando uma matriz final 9x9. O sistema linear que será analisado está representado na Figura 4.

Figura 3 - Sistema Elétrico de 10 barramentos



Fonte: (NASCIMENTO; RAMOS; LORETO, 2018).

Figura 4 - Sistema linear para o sistema de 10 barramentos

$$\begin{pmatrix}
 10,5 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 47,666666 & 0 & 0 & -2 & 0 & -0,666666 & 0 & -40 & 0 \\
 -4 & 0 & 17,882353 & -5,882353 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\
 0 & 0 & -5,882353 & 9,847265 & 0 & 0 & 0 & -1,333333 & -2,631579 & 0 \\
 -4 & -2 & 0 & 0 & 19 & -8 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 27,166666 & -16,666666 & -2,5 & 0 & 0 \\
 0 & -0,666666 & 0 & 0 & -5 & -16,666666 & 30,666666 & -8,333333 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1,333333 & 0 & -2,5 & -8,333333 & 13 & -0,833333 & 0 \\
 0 & -40 & -8 & -2,631579 & 0 & 0 & 0 & -0,833333 & 51,464912 & 0
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ -0,8 \\ 0,2 \\ 0,6 \\ 0,3 \\ 0,8 \\ 0,2 \\ -1,3 \end{pmatrix}$$

Fonte: (NASCIMENTO; RAMOS; LORETO, 2018).

Os dois sistemas lineares apresentados de 4 e 10 barramentos foram estudados utilizando os métodos numéricos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel, toda simulação para posterior análise dos resultados foi executada no software *Matlab*. Para a primeira simulação, sistema de 4 barras, foram definidas algumas variáveis iniciais que estão definidas a seguir:

$$A = [17.3333 \quad -0.6666 \quad 0; -0.6666 \quad 9.0490 \quad -5.8823; 0 \quad -5.8823 \quad 10.8823];$$

$$b = [-0.8; -0.15; -0.25];$$

$$x0 = \text{zeros}(\text{size}(b));$$

$$kmax=1000;$$

$$e=0.000001;$$

onde  $A$  e  $b$  são as matrizes admitância,  $x0$  é uma matriz de zeros com o mesmo tamanho que a matriz  $b$ ,  $kmax$  é o número máximo de iterações e  $e$  é o erro definido como critério de parada.

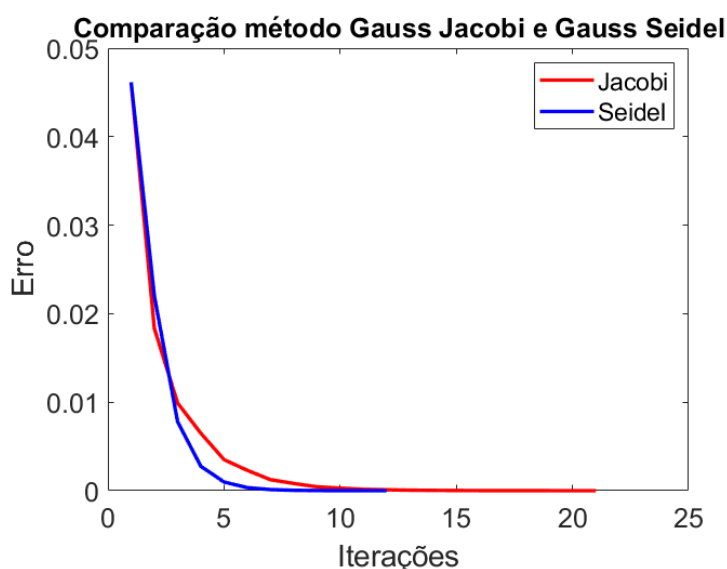
A Tabela 1 a seguir apresenta os resultados encontrados nas aplicações dos métodos numéricos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel, percebe-se que ambos os métodos convergiram para o mesmo resultado, porém o método de Gauss Seidel apresentou um erro menor com menos iterações. Na Figura 5 abaixo está representado o comportamento dos dois métodos para o sistema de 4 barramentos, dando ênfase para o método de Gauss Seidel que convergiu mais rapidamente para o erro definido.

Tabela 1 - Resultado sistema de 4 barramentos

	<b>Gauss Jacobi</b>	<b>Gauss Seidel</b>
	-0.0482	-0.0482
	-0.0541	-0.0541
	-0.0522	-0.0522
<b>Iterações</b>	21	12
<b>Erro final</b>	5,9924E-06	2,2229E-06

Fonte: Autor, 2023.

Figura 5 - Convergência dos métodos para o sistema de 4 Barras



Fonte: Autor, 2023.



Para a segunda simulação, sistema de 10 barras, foram definidas algumas variáveis iniciais que estão definidas a seguir:

$$A = [10.5 \ 0 \ -4 \ 0 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 47.6666 \ 0 \ 0 \ -2 \ 0 \ -0.6666 \ 0 \ -40; \ -4 \ 0 \ 17.8823 \ -5.8823 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -8; \dots \\ 0 \ 0 \ -5.8823 \ 9.8472 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1.3333 \ -2.6315; \ -4 \ -2 \ 0 \ 0 \ 19 \ -8 \ -5 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -8 \ 27.1666 \ -16.6666 \ -2.5 \ 0; \dots \\ 0 \ -0.6666 \ 0 \ 0 \ -5 \ -16.6666 \ 30.6666 \ -8.3333 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0 \ -1.3333 \ 0 \ -2.5 \ -8.3333 \ 13 \ -0.8333; \dots \\ 0 \ -40 \ -8 \ -2.6315 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0.8333 \ 51.4649];$$

$$b = [-1; \ -0.5; \ -0.8; \ 0.2; \ 0.6; \ 0.3; \ 0.8; \ 0.2; \ -1.3];$$

$$x0 = \text{zeros}(\text{size}(b));$$

$$kmax = 1000;$$

$$e = 0.000001;$$

onde  $A$  e  $b$  são as matrizes admitância,  $x0$  é uma matriz de zeros com o mesmo tamanho que a matriz  $b$ ,  $kmax$  é o número máximo de iterações e  $e$  é o erro definido como critério de parada.

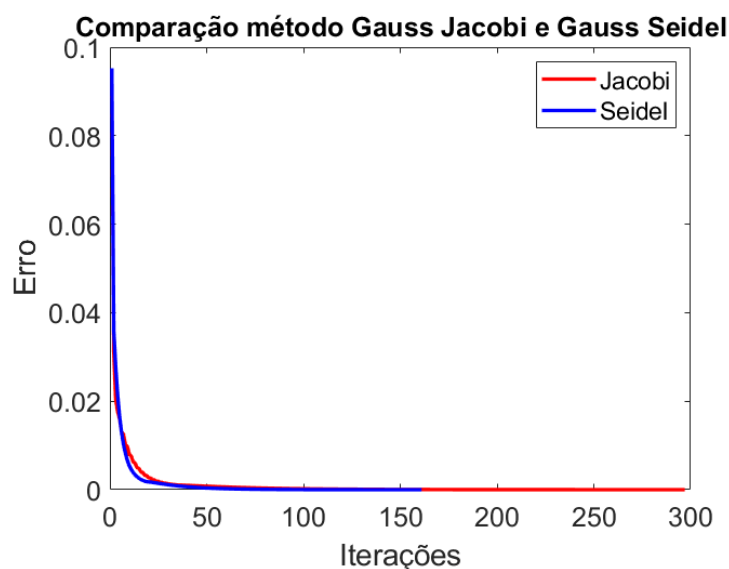
A Tabela 2 a seguir apresenta os resultados encontrados nas aplicações dos métodos numéricos de Gauss Jacobi e Gauss Seidel, percebe-se que novamente ambos os métodos convergiram para o mesmo resultado. Na Figura 6 subsequente está representado o gráfico dos métodos aplicados no sistema de 10 barramentos, dando ênfase outra vez para o método de Gauss Seidel que convergiu mais rapidamente para o erro definido, exatamente como na primeira simulação do sistema de 4 barramentos.

Tabela 2 - Resultado sistema de 10 barramentos

	<b>Gauss Jacobi</b>	<b>Gauss Seidel</b>
	-0.1891	-0.1891
	-0.2054	-0.2054
	-0.2541	-0.2541
	-0.1900	-0.1900
	0.0077	0.0077
	0.0522	0.0522
	0.0591	0.0591
	0.0288	0.0288
	-0.2336	-0.2337
<b>Iterações</b>	297	161
<b>Erro final</b>	6,6044E-05	3,8357E-05

Fonte: Autor, 2023.

Figura 6 - Convergência dos métodos para o sistema de 10 Barras



Fonte: Autor, 2023.

Percebe-se através da análise das Tabelas 1 e 2 que a quantidade de barramentos que um sistema elétrico pode possuir não interfere significativamente na precisão dos resultados finais encontrados, para ambos os métodos numéricos utilizados os erros finais foram consideravelmente baixos. Nas duas situações em estudo o método de Gauss Seidel apresentou melhores resultados, necessitando menos rotinas de cálculo e resultando em um menor erro identificado.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de métodos numéricos para resolução de diferentes sistemas lineares possibilita o estudo e aumentam a acurácia dos resultados. Muitas vezes a resolução desses sistemas é inviável ou até mesmo impossível, pois estes podem ser compostos de um grande número de variáveis e equações. Nesse sentido os métodos numéricos possibilitam trabalhar com sistemas lineares de tamanhos variados e complexos. A grande parte dos sistemas lineares encontrados na vida cotidiana não possuem soluções exatas, dessa forma os métodos numéricos buscam encontrar soluções próximas que possam ser aceitas com um nível específico de

exatidão. Tornando-se essenciais em aplicações práticas como engenharias, física, economia e afins.

Em sistemas elétricos de grande porte, como redes elétricas de distribuição e transmissão, os métodos numéricos podem simular o comportamento do sistema em distintas condições, como falhas e sobrecargas. Também são utilizados na otimização de sistemas elétricos para chegar em determinados propósitos, como reduzir as perdas de energia, melhorar a eficiência e atende a demanda de carga. Em algoritmos de otimização, métodos numéricos são utilizados para descobrir as melhores soluções.

No geral, métodos numéricos representam uma importante função na resolução de problemas complexos em sistemas elétricos, auxiliando os pesquisadores a simular e analisar sistemas elétricos de forma fácil e eficiente. Permitindo a modelagem de sistemas elétricos sobre uma diversidade de circunstâncias, possibilitando o desenvolvimento, o estudo e a operação segura e eficiente desses sistemas.

Todos os métodos utilizados no trabalho apresentaram erros relativos irrisórios, mesmo quando alterados os tamanhos do sistema, com destaque para o método de Gauss Seidel que teve uma melhor convergência em ambos os sistemas elétricos, encontrando um erro final menor com menos rotinas de cálculo. O trabalho desenvolvido permite que métodos numéricos sejam aplicados na resolução de sistemas lineares em problemas de engenharia elétrica, possibilitando para os estudantes uma análise rápida e fácil de sistemas que podem ser amplos e possuir equações complexas para estudos analíticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição**. McGraw Hill Brasil, 2016.

DO NASCIMENTO, Bruno Pereira; RAMOS, Caison Rodrigues; LORETO, Aline Brum. **Análise de fluxo de potência através de métodos numéricos**. *Ciência e Natura*, p. 69-76, 2018.

HOFFMAN, K. e KUNZE, R. A. **Linear Algebra**. PHI Learning, second edition, 2004.

MONTICELLI, Alcir José. **Fluxo de carga em redes de energia elétrica**. E. Blucher, 1983.

MORAIS, Erikson; SILVA, Iara; SILVA, Felipe. Estudo Comparativo entre a Implementação Sequencial e Paralela dos Métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. **Revista Eletrônica de Iniciação Científica em Computação**, v. 18, n. 2, 2020.