Modalidade do trabalho: Ensaio teórico
Evento: XXIII Seminário de Iniciação Científica

UMA ABORDAGEM DOS POLINÔMIOS ORTOGONAIS CLÁSSICOS DE LEGENDRE[1]

Tatiane Fontana Ribeiro[2], Carmo Henrique Kamphorst[3].

[1] Produção do Projeto de Iniciação Científica “Metodologia de Caráter Analítico para Resolução de Problemas formulados na Forma Integral”
[2] Acadêmica do Curso de Matemática da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – Câmpus Frederico Westphalen, bolsista de Iniciação Científica, tatianefontanaribeiro@hotmail.com
[3] Professor Orientador, Doutor do Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – Câmpus Frederico Westphalen, carmo@uri.edu.br

1. Introdução

Vários problemas das mais diversas áreas da ciência podem ser formulados tanto por equações integrais como por equações diferenciais (problemas envolvendo a dinâmica de gases rarefeitos e de fenômenos de transporte, por exemplo). Entretanto, em alguns casos, a utilização da forma integral pode favorecer a aplicação de técnicas de caráter analítico. Nesta perspectiva, o trabalho de tese de doutorado de Kamphorst (2009) fez uso de uma metodologia de caráter analítico que consiste na aplicação de um método espectral, baseado no emprego de expansões truncadas em termos de splines cúbicas de Hermite, para obtenção de soluções fechadas para problemas clássicos da dinâmica de gases rarefeitos em dutos cilíndricos. A possibilidade do emprego desta mesma metodologia em uma classe mais ampla de problemas formulados por equações integrais foi, posteriormente, evidenciada nos trabalhos de Kamphorst et al. (2014).

Nesse contexto, mediante a execução do projeto “Metodologia de Caráter Analítico para Resolução de Problemas Formulados na Forma Integral”, busca-se investigar a viabilidade do emprego de métodos espectrais baseados na utilização de expansões truncadas em termos de polinômios ortogonais clássicos, na obtenção de soluções fechadas para problemas formulados na forma integral, nas mais diversas ciências. Desta forma, no presente artigo são apresentadas definições e propriedades dos polinômios ortogonais clássicos, em especial dos polinômios ortogonais de Legendre, bem como, uma análise do seu comportamento gráfico. Destaca-se, a possibilidade de obtenção e observação de propriedades e comportamento gráfico destes polinômios com o auxílio do Maple.

2 Metodologia

Este artigo é decorrente de estudos realizados no primeiro semestre de execução do projeto já mencionado, no qual buscou-se, através do desenvolvimento das ações previstas no Plano de Trabalho do Bolsista intitulado “Polinômios Ortogonais e Problemas Formulados na Forma

Integral", estudar aspectos relacionados aos polinômios ortogonais clássicos; através de uma revisão bibliográfica, visando assim, obter aporte necessário para o desenvolvimento dos demais objetivos do projeto. Simultaneamente a isso, realizou-se um estudo dos comandos do software Maple para posterior obtenção dos polinômios e seus respectivos gráficos.

3 Resultados e Discussões

3.1 Polinômios ortogonais

Dizemos que um sistema de polinômios

$$\{\phi_r(x)\}_{r=0}^{\infty}$$

é ortogonal se o produto interno entre dois polinômios quaisquer,

$$\phi_m(x)$$

e

$$\phi_m(x)$$

é

$$\langle \phi_m(x), \phi_n(x) \rangle = \int_a^b \omega(x)\,\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \;=\; \begin{cases} 0, & se\; m \neq n \\ \gamma_{\phi_m} \neq 0, & se\; m = n \end{cases} \qquad (1)$$

sendo

$$\omega(x)$$

a função peso associada e

$$\gamma_{\phi_m}$$

a norma dos polinômios expressa por

$$\gamma_{\phi_m} = \langle \phi_m(x), \phi_m(x) \rangle = \int_a^b \omega(x)[\phi_m(x)]^2 dx > 0. \qquad (2)$$

Os polinômios ortogonais podem contribuir para a resolução de diversos problemas da matemática pura e aplicada. Rafaeli (2010) aborda um enquadramento histórico do estudo do comportamento dos zeros de polinômios ortogonais. O referido autor ressalta que desde o século XIX as raízes desses polinômios já chamavam a atenção dos grandes matemáticos da época, como A. Markov e T. J. Stieltjes, além de G. Szego, na terceira década do século XX.

Em função da contribuição proporcionada por estas funções especiais a diversos ramos da Matemática Pura e Aplicada, ainda de acordo com Rafaeli (2010), os polinômios ortogonais ainda são de interesse de alguns importantes matemáticos, como Percy Deift do Courant Institute of Mathematical Sciences e autor do livro “Orthogonal Polynomials and Random Matrices: a Riemann-Hilbert Approach” e, Barry Simon, que também é autor dos quatro volumes do livro “Methods of Modern Mathematical Physics”, juntamente com Michael Reed. Além disso, recentemente Barry Simon se interessou nesse estudo, cujo resultado foi um grande e consistente livro “Orthogonal Polynomials on the Unit Circle”, além de muitos artigos abordando zeros de polinômios ortogonais na circunferência unitária e na reta real.

Contudo, a mais expressiva das contribuições dos zeros de polinômios ortogonais, certamente, se refere ao entrelaçamento dos mesmos que formam os nós das fórmulas de aproximação numérica das integrais de uma função, conhecidas como fórmulas de quadratura.

3.2 Polinômios de Legendre

As principais características dos polinômios ortogonais de Legendre residem no fato de serem definidas no intervalo [-1,1], assumirem a função peso

$$\omega(x) = 1$$

e serem definidas com os parâmetros

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico
Evento: XXIII Seminário de Iniciação Científica

$$\alpha = \beta = 0$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é dada por:

$$\langle P_m(x), P_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & se\ m = n \end{cases}. \qquad (3)$$

No Maple, tais polinômios podem ser gerados pelo comando P(n,x), em que n deve indicar a ordem do polinômio de Legendre e x é a variável. Lembrando que este comando só estará disponível ao se fazer uso do pacote ortogonal, ao se digitar with(orthopoly). Assim, no Gráfico 1 tem-se a representação gráfica dos polinômios de Legendre de ordem 0 até 4, obtido em Maple mediante a execução do comando plot([P(0,x), P(1,x), P(2,x), P(3,x), P(4,x),x=-1..1,legend=[“P(0,x)”, “P(1,x)”, “P(2,x)”, “P(3,x)”, “P(4,x)”]);

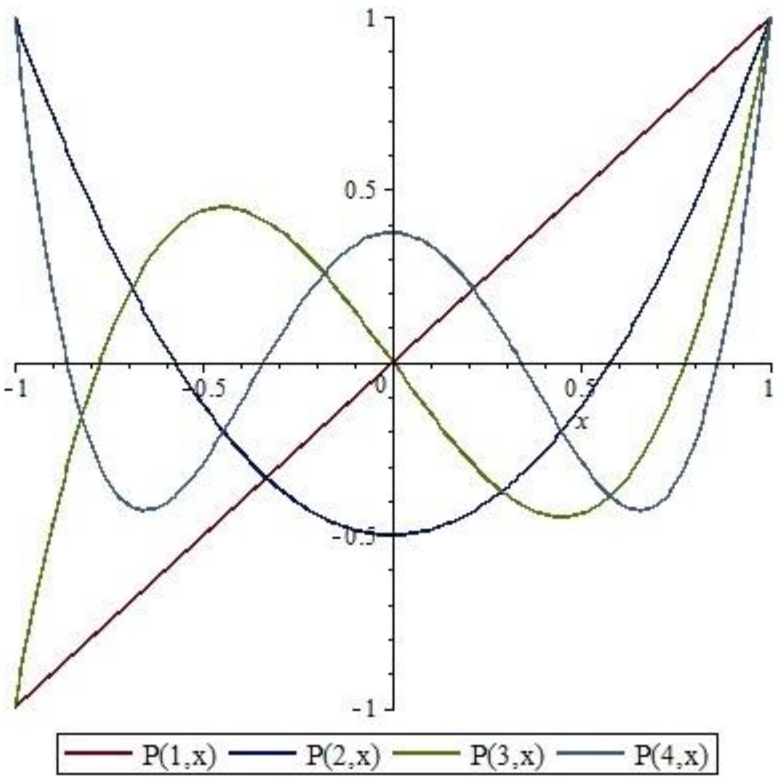

GRÁFICO 1: Polinômios de Legendre

Conforme as propriedades citadas por Gonçalves (2004), neste gráfico é possível observar que os polinômios de Legendre de ordem par são funções pares e os de ordem ímpar são funções ímpares; e que os mesmos possuem módulo menor ou igual a um no intervalo [-1,1]. Além disso, constata-se ainda, que os polinômios de Legendre de ordem n possuem exatamente n zeros reais no intervalo [-1,1].

4 Conclusões

Da definição dos polinômios ortogonais tem-se uma característica muito importante, que consiste do fato da integral definida do produto de dois polinômios ortogonais do mesmo tipo e ordens diferentes, pela respectiva função peso, em um intervalo pré-estabelecido (dependendo do tipo do polinômio), ser sempre nula. Fato esse, resultante do comportamento gráfico simétrico dos produtos envolvendo polinômios de ordens diferentes. Enquanto que, as mesmas integrais com polinômios ortogonais de mesma ordem, assumem valores que podem ser determinados por expressões conhecidas.

Além disso, o sistema computacional simbólico Maple possui um pacote orthopoly que permite gerar e manipular expressões envolvendo qualquer um dos polinômios ortogonais clássicos estudados. Fato que possibilitou a realização de uma análise do comportamento gráfico destes polinômios, permitindo observar, por exemplo, que os zeros dos polinômios ortogonais são números reais entrelaçados dentro do intervalo de definição do polinômio. Logo, acredita-se que essas e as demais significativas propriedades destes polinômios podem contribuir de modo significativo para o aperfeiçoamento da metodologia já empregada por Kamphorst (2009).

Palavras-Chave: Polinômios Ortogonais; Polinômios de Legendre; Definições; Propriedades; Análise Gráfica.

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPERGS – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul – pela agência financiadora da Bolsa de Iniciação Científica.

Referências Bibliográficas

BRACCIALI, Cleonice Fátima; ANDRADE, Eliana Xavier Linhares de. Zeros de Polinômios Ortogonais: Interpretação Eletrostática e Análise de Frequências. III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. Disponível em:<http://mat.ufg.br/bienal/2006/mini/e.cleonice.pdf>. Acesso em: 30. set. 2014.

GONÇALVES, João Luís; KOZAKEVICH, Daniel Norberto. Introdução à Aproximação de Funções. Florianópolis, 2004, 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em:<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96553/Joao_Luis_Goncalves.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 29. out. 2014.

KAMPHORST, Carmo Henrique; BARICHELLO, Liliane Basso. Fluxo de Gases Rarefeitos em Dutos Cilíndricos: Uma abordagem via Equações Integrais, Tese de Doutorado. Porto Alegre, UFRGS, 2009.

KAMPHORST, Carmo Henrique; KAMPHORST, Eliane Miotto; GRASSI, Gilberto Antônio. Soluções de Caráter Analítico para Problemas formulados na forma integral. Revista Junior de Iniciação Científica em Ciências Exatas e Engenharia. Rio Grande: FURG,n.8, v.1, agosto. 2014, p. 1-8.

NIIME, Fabio Nosse. Polinômios Ortogonais em Várias Variáveis. São José do Rio Preto, 2011, 106 f. Dissertação de Mestrado, São José do Rio Preto. Disponível em:< http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/86506/niime_fn_me_sjrp.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 06. nov. 2014.

RAFAELI, Fernando Rodrigo. DIMITROV, Dimitar Kolev. ANDREANI, Roberto. Zeros de polinômios ortogonais na reta real. Campinas, 2010, 145 f. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.