

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico

Evento: XXI Jornada de Pesquisa

TEOREMA DE BAYES: ESTUDO E APLICAÇÃO¹

Felipe Copceski Rossatto², Julia Dammann³, Eliane Miotto Kamphorst⁴, Carmo Henrique Kamphorst⁵, Ana Paula Do Prado Donadel⁶.

¹ Projeto do programa institucional de bolsa de Iniciação à docência do curso de Matemática - URI/FW

² Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-FW. E-mail:mylarf@outlook.com

³ Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-FW. E-mail:julia_dammann@hotmail.com

⁴ Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-FW. E-mail:anne@uri.edu.br

⁵ Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-FW. E-mail:carro@uri.edu.br

⁶ Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões-FW. E-mail:donadel@uri.edu.br

INTRODUÇÃO

O presente trabalho busca apresentar e exemplificar um dos mais importantes teoremas do estudo probabilístico atual, desenvolvido pelo matemático inglês Thomas Bayes.

Embora não se tenha muitas informações referentes a vida de Thomas Bayes, sabe-se que ele foi um reverendo presbiteriano que viveu no século 18 entre os anos de 1702 a 1761, na Inglaterra. Além da sua ocupação como reverendo, Bayes dedicou sua vida ao estudo das causas e efeitos da probabilidade.

Thomas Bayes jamais chegou a tornar público, enquanto estava vivo nenhum resultado de seus estudos na área da probabilidade e provavelmente, nunca teve consciência da importância que iria ter no futuro suas descobertas neste campo.

A única publicação dentro da área da Matemática feita por Thomas Bayes se deu no ano de 1736, com um livro chamado The doctrine of fluxion (A doutrina dos fluxions) e tratava sobre a derivativa de uma função continua.

No ano de 1763, dois anos após a morte de Thomas Bayes, seu amigo filósofo Richard Price (1732-1791), apresentou a Real Sociedade, uma entidade científica britânica da época, um artigo que encontrou entre os papéis de Bayes, com o nome de An essay towards solving a problem in doctrine of chances (Ensaio buscando resolver um problema na doutrina das probabilidades). Nesse artigo constava a demonstração do Teorema de Bayes.

Este presente trabalho, vem com o intuito de apresentar o Teorema desenvolvido por Thomas Bayes, Teorema este, de grande importância no ramo probabilístico atual. Para isso, será apresentado exemplos de aplicação do mesmo, contextualizadas em áreas diversas do conhecimento, possibilitando a exemplificação de suas aplicações.

METODOLOGIA

Para a elaboração desse artigo, realizou-se uma pesquisa bibliográfica como aporte teórico para um aprofundamento no ramo das teorias de probabilidade, mais especificamente no tópico de probabilidade total e Teorema de Bayes. Acompanhado da pesquisa teórica, buscou-se exemplos de

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico

Evento: XXI Jornada de Pesquisa

aplicações dentro do contexto da sociedade atual para o Teorema de Bayes, com o objetivo de uma melhor apresentação do teorema proposto.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Segundo Jaynes (2003), a visão de Thomas Bayes, referida como visão Bayesiana de probabilidade, é simples: a probabilidade é o que mede o grau de incerteza sobre alguma coisa ou acontecimento, ela representa também o quanto é a chance de um determinado evento ocorrer devida certas circunstâncias.

Seguindo a ideia de Jaynes (2003), existem três pontos principais em que o Teorema de Bayes está apoiado para encontrar as probabilidades de certos acontecimentos:

Representação numérica: O grau de certeza ou incerteza sobre determinado evento deve ser representado numericamente por alguma função matemática.

Correspondência qualitativa com o senso comum: Quando se obtém informações sobre ou a favor de um evento, sua probabilidade de ocorrência tende a aumentar um pouco. Isso garante que não a probabilidade não possua variações extremamente diferentes dos eventos acontecidos normalmente.

Consistência: Duas maneiras diferentes de se chegar em um resultado devem chegar no mesmo valor.

Antes de apresentar o teorema de fato, é preciso levar em consideração alguns tópicos necessários para a aplicação do mesmo.

Probabilidade a priori: É a probabilidade de um fato ter ocorrido ou não (ANDERSON, 2005).

Probabilidade a posteriori: É a probabilidade revista, com base nas novas informações dadas (ANDERSON, 2005).

Probabilidade Condicional: É, basicamente, a probabilidade de um evento A ocorrer, quando sabemos que um outro evento B já tenha ocorrido (SWEENEY, 2014). Por exemplo, a probabilidade de uma pessoa venha a contrair AIDS sendo que ela é usuária de drogas injetáveis é uma probabilidade condicional.

Com dois eventos, A e B, a probabilidade condicional de A dado B pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(A|B)$$

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico
Evento: XXI Jornada de Pesquisa

A probabilidade condicional também pode ser obtida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Eventos independentes: Eventos independentes ocorrem quando a probabilidade de um evento A ocorrer não se altera em função de um evento B que já tenha ocorrido. (ANDERSON, 2005).
Eventos independentes são representados por:

$$P(A|B) = P(A)$$

Lei da multiplicação: É usada para calcular a probabilidade de uma intersecção de dois eventos (ANDERSON, 2005).

Para eventos dependentes pode ser calculado através de:

$$P(A \cap B) = P(B) * P(A|B)$$

E para eventos independentes:

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico

Evento: XXI Jornada de Pesquisa

$$P(A \cap B) = P(B) * P(B)$$

Lei da probabilidade total: De extrema importância para o Teorema de Bayes, através dessa lei é possível expressar a probabilidade total de um resultado acontecer através de vários eventos distintos.

$$P(B) = \sum_{n} \Pr(A \cap B_n)$$

Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes, também é conhecido como Teorema das Causas e, sua aplicação, pode ser usada para obter vários resultados nas mais diversas áreas do conhecimento, desde o mercado financeiro até a medicina.

Para demonstrar a versatilidade do Teorema de Bayes, serão apresentados alguns exemplos da aplicação do mesmo, nos mais variados campos científicos.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Onde:

$P(A)$ = Probabilidade a priori

$P(B|A)$ = Probabilidade condicional

$P(B)$ = Probabilidade Total dos eventos ocorrerem

$P(A|B)$ = Probabilidade a posteriori

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico
Evento: XXI Jornada de Pesquisa

Exemplo 1:

Segundo os seguintes dados supostos sobre câncer de mama, qual é a porcentagem de uma mulher qualquer obter o resultado positivo em uma mamografia e realmente estar com câncer?

1% das mulheres possuem câncer de mama;

80% das mamografias detectam câncer de mama quando ele está presente e consequentemente, 20% das vezes não detectam;

9,6% das mamografias detectam câncer de mama quando ele não está presente e com isso, 90,4% do teste dão um resultado negativo correto.

Colocando os dados em uma tabela:

	% de mulheres	Resultado do exame positivo	Resultado do exame negativo
Chance de ter câncer	1% = 0,01	80% = 0,8	20% = 0,2
Chance de não ter câncer	99% = 0,99	9,6% = 0,096	90,4% = 0,904

Através do Teorema de Bayes:

$P(A|B)$ = Chance de ter câncer (A) obtendo um resultado positivo (B)

$P(B|A)$ = Chance de obter um resultado positivo (B) tendo câncer (A)

$P(A)$ = Chance de ter câncer

$P(nA)$ = Chance de não ter câncer

$P(B|nA)$ = Chance de obter um resultado positivo (B) não tendo câncer (nA)

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{0,01 * 0,8}{(0,01 * 0,8) + (0,99 * 0,096)}$$

$$P(A|B) = 0,077 \text{ ou } 7,8 \%$$

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico

Evento: XXI Jornada de Pesquisa

Portanto, através dos dados do Exemplo 1, o Teorema de Bayes nos indica que a chance de uma mulher que fez o exame de mamografia e obteve o resultado positivo realmente ter câncer é de 7,8%.

Exemplo 2:

As fábricas A, B e C são responsáveis por 50%, 30% e 20% do total de celulares produzidas por uma empresa. Os percentuais de celulares defeituosas na produção destas fábricas valem respectivamente 1%, 2% e 5%. Um celular produzido por essa empresa é adquirido em uma loja por um cliente. Qual é a probabilidade de o celular adquirido pelo cliente apresentar defeito de fábrica? E qual a probabilidade de um celular com defeito ter sido fabricado na fábrica C?

Vamos a resolução:

$P(A|D)$ = Probabilidade da fábrica A produzir um celular defeituoso (D).

$P(B|D)$ = Probabilidade da fábrica B produzir um celular defeituoso (D).

$P(C|D)$ = Probabilidade da fábrica C produzir um celular defeituoso (D).

$P(D)$ = Probabilidade total da empresa produzir um celular defeituoso (D).

Primeiramente, precisamos calcular a probabilidade total da fabricação de um celular defeituoso.

$$P(D) = (0,5 * 0,01) + (0,3 * 0,02) + (0,2 * 0,05)$$

$$P(D) = 0,021 \text{ ou } 2,1 \%$$

Com isso, a chance de um celular fabricado por essa empresa possuir defeito de fábrica é de 2,1%. Agora através do Teorema de Bayes, é possível calcular a probabilidade de um celular com defeito ser produzido pela fábrica C.

$$P(C|D) = \frac{(0,2 * 0,05)}{0,021}$$

$$P(C|D) = 0,476 \text{ ou } 47,6\%$$

Modalidade do trabalho: Ensaio teórico

Evento: XXI Jornada de Pesquisa

Portanto, a chance da fábrica C ter produzido um celular defeituoso é de 47,6%.

CONCLUSÃO

A partir destes exemplos apresentados, um deles dentro da área médica e outro dentro da área industrial, é possível observar que o Teorema de Bayes pode ser aplicado em áreas do conhecimento totalmente diferentes e sem ligações claras entre si, tornando-se de grande auxílio no campo de probabilidade atual.

Portanto, embora Thomas Bayes não tenha tido seu trabalho publicado e reconhecido em vida, pode-se concluir que o reverendo inglês, tornou-se um dos grandes matemáticos na área probabilística, tendo revolucionado este campo através do seu estudo das causas e efeitos da probabilidade.

Palavras Chave: Probabilidade, lei da probabilidade total, estatística.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, D. R.; SWEENEY, D. J.; WILLIAMS, T. A. Statistics for Business and Economics. Thompson, 2005.

JAYNES, E.T; Probability Theory: The Logic of Science. Cambridge, Cambridge University Press, 2003.

PENA, S.D, Thomas Bayes: O Cara. Revista Ciência Hoje, vol 38, nº 228, 2006. Disponível em: www.icmc.usp.br/pessoas/francisco/sme0120/material/Thomas_Bayes_CH.pdf. Último acesso em: 28 de jun. 2016.