

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA DA TEMPERATURA DE UM LÍQUIDO EM UMA GARRAFA TÉRMICA COM AMPOLA DE VIDRO¹
MATHEMATICAL MODELING OF THE TEMPERATURE DYNAMICS OF A LIQUID IN A THERMAL FLASK WITH GLASS LAMP

Dionatan Breskovit De Matos², Nelize Fracaro³, Eduardo Post⁴, Antonio Carlos Valdiero⁵

¹ Pesquisa realizada durante o Curso de Mestrado em Modelagem Matemática da UNIJUI.

² Mestrando do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática da UNIJUI, bolsista UNIJUI, breskovit.mat@gmail.com.

³ Mestranda do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática da UNIJUI, bolsista UNIJUI, nelize_fracaro@hotmail.com.

⁴ Mestrando do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática da UNIJUI, bolsista CAPES, edupostmat@gmail.com.

⁵ Professor Doutor do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática, valdiero@unijui.edu.br.

Resumo: O Cálculo Diferencial e especificamente as Equações Diferenciais Ordinárias, possuem diversas aplicações. Dentre elas, tem-se o estudo e investigação de problemas relacionados à dinâmica da temperatura de um fluido. O presente artigo tem como objetivo verificar a capacidade de conservação de temperatura de líquidos em uma garrafa térmica de ampola de vidro. Este problema é uma aplicação da lei de resfriamento/aquecimento de Newton e tem em vista determinar quanto tempo um líquido, quente e/ou frio, mantém-se a uma temperatura ainda considerada ideal para o consumo. Para tanto, realizou-se a aquisição de dados experimentais a serem utilizados na validação do modelo matemático. Alguns parâmetros para o modelo empregado foram determinados experimentalmente e outros analiticamente. O modelo foi programado utilizando-se o software MatLab/Simulink e essa simulação foi comparada aos dados experimentais, visando confirmar a confiabilidade do modelo matemático desenvolvido por Newton. A garrafa térmica mostrou-se eficaz na conservação de temperaturas de líquidos.

Abstract: The Differential Calculus and specifically the Ordinary Differential Equations, have several applications. Among them, one has the study and investigation of problems related to the dynamics of the temperature of a fluid. The purpose of this paper is to verify the storage temperature of liquids in a glass ampoule bottle. This problem is an application of Newton's cooling/heating law and aims to determine how long a liquid, hot and/or cold, remains at a temperature still considered ideal for consumption. For that, the acquisition of experimental data to be used in the validation of the mathematical model was performed. Some parameters for the employed model were determined experimentally and others analytically. The model was programmed using the software MatLab/Simulink and this simulation was compared to the experimental data, in order to confirm the reliability of the mathematical model developed by Newton. The thermos flask proved effective in conserving liquid temperatures.

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

Palavras-Chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Problema de temperatura; Modelo matemático.

Keywords: Ordinary Differential Equations; Temperature problem; Mathematical model.

1 INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial caracteriza-se como um importante instrumento matemático, e que, de acordo com os apontamentos de Howard Anton, “tem um enorme impacto em nossa vida diária, porém, frequentemente não é notado” (2000, p. 2). Alguns exemplos que elucidam esta afirmação são: a utilização na compactação de impressões digitais do FBI (Federal Bureau of Investigation), na música, na previsão do tempo, controle do comportamento caótico do coração humano, entre muitos outros. (ANTON, 2000).

As aplicações do Cálculo Diferencial, especificamente das equações diferenciais, abrem infinitas possibilidades de estudo e investigação. As equações diferenciais de primeira ordem constituem um dos instrumentos chave para o desenvolvimento da Matemática moderna. Estas possuem uma ampla aplicabilidade e são essenciais na análise e resolução de diversos problemas.

Um problema de temperatura, por exemplo, pode ser solucionado empregando a lei de resfriamento de Newton na análise de dados experimentais (STEWART, 2012). Tal técnica possibilita determinar, com pequenas incertezas, a solução de situações-problema desde as simples até as mais complexas.

Neste sentido, buscou-se realizar um experimento, a fim de analisar a capacidade de conservação de temperaturas de uma garrafa térmica de ampola de vidro, com o cálculo do tempo em que um líquido quente ou frio, mantém-se em uma temperatura adequada para o consumo. Além disso, o presente artigo visa confirmar/validar o modelo matemático desenvolvido por Newton através da comparação entre os dados reais e simulações computacionais. Trata-se de um exemplo de aplicação das equações diferenciais, bem como, de um processo de modelagem matemática de um fenômeno físico, o qual pode ser abordado no ensino em cursos na área da matemática e de engenharia.

O trabalho está organizado da seguinte forma: A seção 2 apresenta a técnica de modelagem utilizada neste trabalho e a metodologia detalhada da aquisição dos dados. Na seção 3 é apresentado o modelo empregado, o cálculo de parâmetros, a simulação computacional e a análise dos resultados obtidos. Finaliza-se, apresentando as conclusões.

2 METODOLOGIA

Segundo Aguirre (2004) “um modelo matemático de um sistema real é um análogo matemático que representa algumas das características observadas em tal sistema”. Neste sentido, os modelos ajudam na percepção de como é o sistema, ou como se espera que ele seja, permitindo, em determinadas condições de operação, mudar a estrutura ou o comportamento do sistema (MONTEIRO, 2002). Quanto mais precisas estas condições, mais próximo da realidade vai ser o modelo.

Existem várias formas e técnicas relacionadas à obtenção de modelos matemáticos de sistemas reais e classificam-se em três grupos: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

modelagem caixa cinza. Na modelagem caixa preta, utilizada neste trabalho, não é necessário ter nenhum conhecimento a respeito do sistema que é trabalhado e nem das leis físicas que o regem (AGUIRRE, 2004).

A fim de verificar quanto tempo um líquido mantém-se quente e/ou frio, de modo que este possa ser consumido, numa temperatura ainda adequada, e, além disso, confirmar/validar o modelo matemático de resfriamento de Newton realizou-se um experimento. Para o mesmo, empregou-se uma garrafa térmica de ampola de vidro com capacidade de um litro, água quente e fria, um termômetro cilíndrico a álcool colorido e um cronômetro, de acordo com o ilustrado na figura 1.

Figura 1: Materiais utilizados no experimento



Fonte: autoria própria.

Primeiramente, aqueceu-se a água. Após ser introduzida na garrafa térmica, esta apresentava uma temperatura de 78°C. A temperatura ambiente era de 18°C, a qual foi considerada constante. A cada dez minutos a temperatura da água foi medida e os dados obtidos foram registrados.

Com a água gelada, o processo foi repetido, sendo que sua temperatura inicial era de 1°C e a temperatura ambiente era de 22,5°C, também considerada constante.

Por meio do experimento, obtiveram-se os seguintes dados registrados na tabela abaixo:

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

Tabela 1: Temperatura dos líquidos (quente e frio) em função do tempo.

Temperatura	Líquido Quente	Líquido Frio
0	78°	1°
10	76°	1,5°
20	74°	2°
30	73°	2,2°
40	72°	2,5°
50	71°	3°
60	69°	3,2°
70	68°	3,5°
80	67°	3,8°
90	66°	4°
100	65,5°	4,5°
110	65°	5°
120	64°	
130	63°	
140	61°	
150	60°	

Fonte: autoria própria.

Para este estudo, as temperaturas limites consideradas ainda agradáveis para o consumo foram de 60°C e 5°C, para a água quente e para a fria, respectivamente.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O modelo de resfriamento/aquecimento de Newton denota que a temperatura de um corpo varia a uma taxa proporcional à diferença entre a sua temperatura e a temperatura do meio que o cerca (a temperatura do ambiente) (BRONSON, COSTA e SILVEIRA, 2008, ZILL e FARIAS, 2001), expresso matematicamente como:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

em que T é a temperatura do corpo (°C), t é o tempo (minutos), k é a constante de proporcionalidade (por minuto) e T_m é a temperatura do ambiente (°C). Salienta-se que tal modelo também pode ser utilizado para o aquecimento.

Deste modo, os parâmetros do modelo foram calculados analiticamente para o líquido quente e frio, a fim de definir parâmetros para as simulações computacionais posteriores. A solução da

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

equação diferencial que constitui o modelo de resfriamento/aquecimento de Newton é dada por:

$$T = ce^{kt} + T_m$$

Utilizando-se dois pares de dados experimentais (tempo e temperatura) é possível determinar os valores das constantes k e c. Posteriormente pode-se estimar o tempo necessário para que o líquido atinja qualquer temperatura almejada.

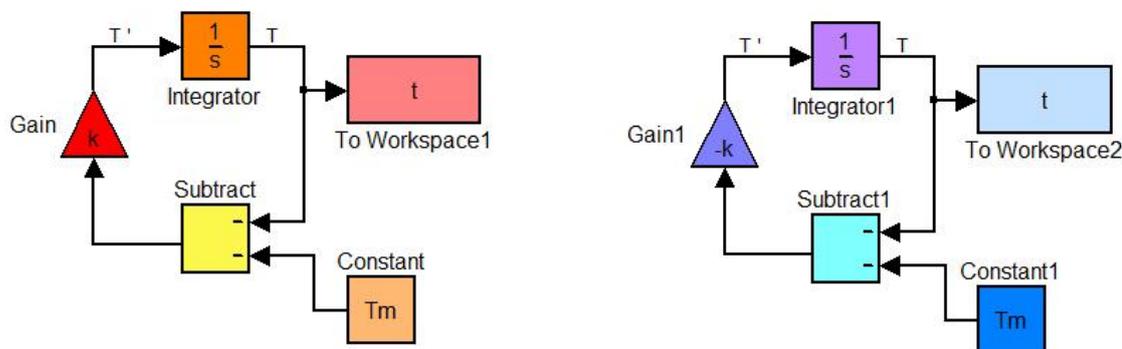
Assim, para um valor de temperatura igual a 60°C, obteve-se o tempo de duas horas, vinte e três minutos e quarenta e cinco segundos. Já para um valor de temperatura igual a 5°C, estimou-se um tempo de uma hora, quarenta e cinco minutos e vinte e cinco segundos.

Percebe-se que transcorre um tempo considerável para os líquidos, quente e frio, permanecerem a uma temperatura ainda agradável para consumo.

A temperatura inicial do líquido quente (T=78°C) foi definida como parâmetro, assim como a temperatura do ambiente, que foi considerada constante (T_m=18°C). No caso do líquido frio, este apresentava a temperatura inicial de 1°C (T=1°C), e a temperatura do meio era de 22,5°C (T_m) também considerada constante.

A partir da resolução analítica, obtiveram-se as constantes de proporcionalidade k para ambos os casos, as quais foram adotadas como parâmetros para o sistema. Para a simulação computacional do modelo proposto, foram utilizados dois diagramas de blocos (Figura 2), no software MatLab/Simulink com o parâmetro k com sinais distintos, a fim de ilustrar o aquecimento e o resfriamento dos líquidos e também compará-los aos dados registrados experimentalmente. Foi utilizado o método de integração Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo de integração 10⁻⁶ e o tempo de amostragem de dez minutos.

Figura 2 - Diagramas de blocos do modelo matemático da lei de aquecimento/resfriamento de Newton

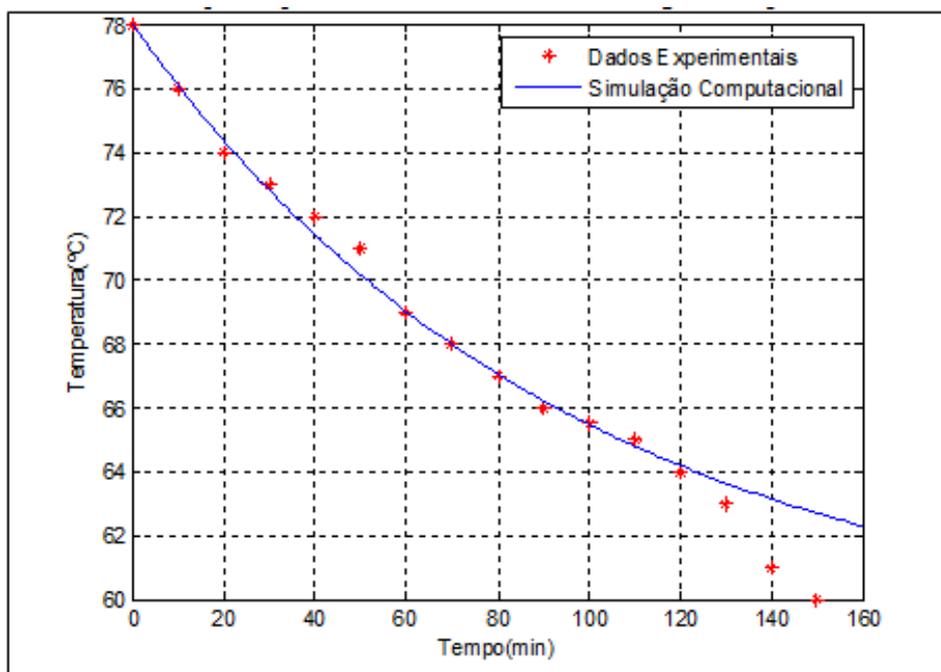


Fonte: autoria própria.

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

As figuras 3 e 4 a seguir, apresentam a comparação entre resultados obtidos por meio de simulações computacionais e os dados experimentais registrados na tabela 1, para as mesmas condições iniciais.

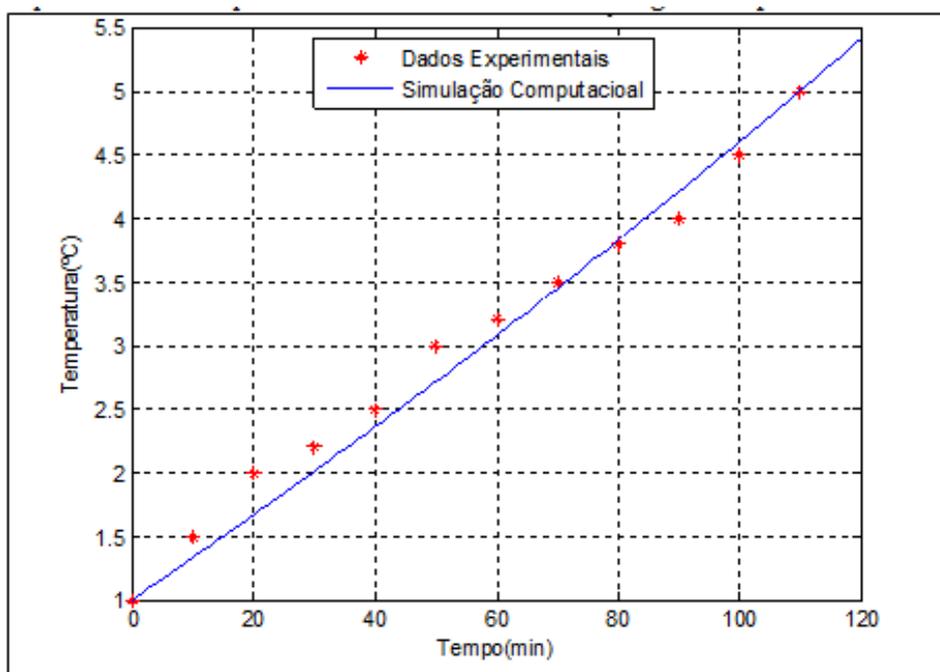
Figura 3 - Gráfico da comparação entre dados experimentais e simulados do resfriamento do líquido quente no instante $t=0$ até atingir a temperatura de 60°C .



Fonte: autoria própria.

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

Figura 4 - Gráfico da comparação entre dados experimentais e simulados do aquecimento do líquido frio no instante $t=0$ até atingir a temperatura de 5°C .



Fonte: autoria própria.

De acordo com o manual do consumidor da garrafa térmica utilizada no experimento (SOPRANO, 2017), o teste de eficiência/funcionalidade consiste em verificar se, após cerca de duas horas, a água com aproximadamente 90°C , se mantém ainda quente. Dessa forma, a garrafa térmica utilizada neste estudo está de acordo com as exigências especificadas em seu manual.

4 CONCLUSÃO

O experimento realizado demonstrou uma das formas em que a Matemática é aplicada cotidianamente. Atividades como esta podem contribuir de maneira significativa para com o ensino de Equações Diferenciais, numa perspectiva prática através da modelagem matemática de um fenômeno real. Os resultados obtidos confirmam a capacidade de conservação de temperaturas de uma garrafa térmica, onde os dois líquidos, mantiveram-se em temperaturas consideradas adequadas para consumo durante aproximadamente duas horas, conforme previsto analiticamente. Observa-se que o comportamento obtido via simulação computacional, foi similar ao dos dados experimentais. Justifica-se a diferença entre as curvas pelo fato de a temperatura ambiente ter sido considerada constante, pois sabe-se que na realidade, ela sofre variações. Além disso, existem diversas influências na variação da temperatura, tais como: se a garrafa manteve-se fechada todo o tempo, o volume de líquido armazenado, entre outras. Conclui-se também que é muito importante contextualizar o processo de ensino-aprendizagem de cálculo diferencial em

Evento: XXII Jornada de Pesquisa

problemas cotidianos, construindo relações de teoria e prática como um todo único do saber.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BRONSON, R; COSTA, G; SILVEIRA, F. H. **Equações diferenciais**. 3. ed São Paulo: Makron Books do Brasil, 2008.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002.

SOPRANO. **Manual do consumidor: garrafa térmica exclusiva 1L, 1,9L e 2,5L tradição**. Disponível em: http://www.soprano.com.br/sites/default/files/downloads/portal/manual_exclusiva_1l-19l-25l_tradicao.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2017.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

ZILL, D. G.; FARIAS, A. A. **Equações diferenciais**. 3.ed. São Paulo: Pearson Education, 2001.