

Evento: XXV Seminário de Iniciação Científica

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA APLICADO À DEFLEXÃO DE VIGA¹ **RUNGE-KUTTA METHOD APPLIED TO BEAM DEFLECTION**

Giovani Prates Bisso Dambroz², Peterson Cleyton Avi³

¹ Texto produzido a partir de trabalho desenvolvido em disciplina de graduação na UNIJUI.

² Aluno do curso de graduação em Engenharia Mecânica da UNIJUI, bolsista PIBITI/UNIJUI, giovanipbd@gmail.com

³ Professor Mestre do Departamento de Ciências Exatas e Engenharias da UNIJUI, peterson.avi@unijui.edu.br

1. Introdução

O presente trabalho irá mostrar o desenvolvimento e a resolução de um problema de deflexão de vigas utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Conforme mostra Trefethen (2010), a maioria dos problemas matemáticos não pode ser resolvida em uma sequência finita de operações elementares. A análise numérica entra como uma alternativa viável para calcular resultados aproximados com precisão suficiente para uso em aplicações científicas e de engenharia.

Elementos estruturais são amplamente utilizados na construção civil. As vigas são importantes elementos, que com diferentes perfis e materiais, resistem a solicitações dos vários tipos. Neste caso, será feita a análise da deflexão de uma viga prismática de perfil I, sujeita a uma carga perpendicular ao eixo longitudinal, aplicada em sua extremidade. Serão efetuados os cálculos de forma analítica, além de simulação em *software* de CAE (*Computer Aided Engineering*, ou Engenharia Assistida por Computador), pelo método de elementos finitos, para comparação com o método de Runge-Kutta.

2. Metodologia

A viga a ser analisada é representada na figura 1. O corpo possui seis metros de comprimento, e foi modelado em aço estrutural ASTM A36. De acordo com o software utilizado na modelagem e simulação, este material apresenta módulo de elasticidade longitudinal, representado pela letra E, de 200 GPa, e um limite de escoamento, representado por σ_e , de 250 MPa.

Há uma força aplicada na extremidade da viga, em sua face superior, e uma fixação na extremidade oposta. Esta situação pode ser representada por um Diagrama de Corpo Livre, que mostra as forças atuantes na viga, de acordo com a figura 1c.

Evento: XXV Seminário de Iniciação Científica

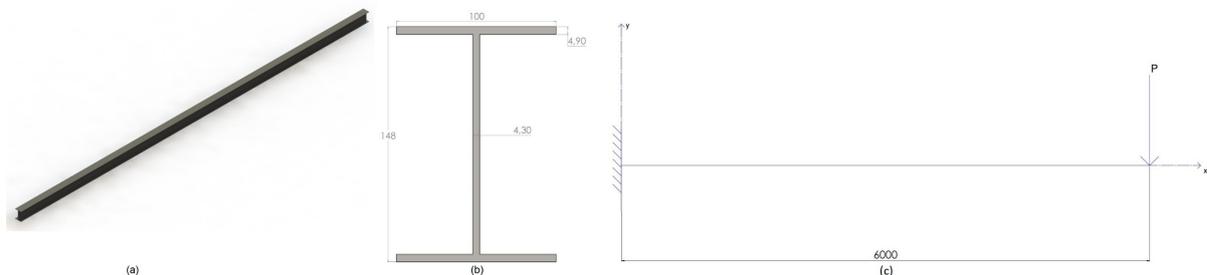


Figura 1: Viga representada em software de CAD na vista (a) isométrica e (b) frontal dimensionada, e (c) diagrama de corpo livre.

Aplicando a metodologia proposta por Hibbeler (2010) para cálculo de esforço cortante e momento fletor, na viga a ser analisada, temos as seguintes equações:

$$v(x) = P \quad (1)$$

$$M(x) = Px - 6000P \quad (2)$$

onde $v(x)$ e $M(x)$ são, respectivamente, o esforço cortante e o momento fletor para cada ponto do intervalo compreendido por $0 \leq x \leq 6000$.

Baseando-se nas teorias de Euler e Bernoulli para deflexão de vigas, e levando em conta que as seções transversais permanecem planas e normais ao eixo flexionado da viga (BAUCHAU, 2009), aplica-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3)$$

onde EI representa a rigidez à flexão do corpo (GERE, 2004), e $y(x)$ representa a curvatura da viga flexionada.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem, para funções definidas por uma variável, como mostram Boyce e DiPrima (1996), se dá por

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6} \left[f(x_n) + 4f\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + f(x_n + h) \right] \quad (4)$$

e é apontado como um método numérico de resolução de equações diferenciais ordinárias altamente eficiente, que pode ser implementado com certa facilidade (BOYCE & DIPRIMA, 1996). A cada iteração, este método calcula inclinações em quatro pontos, obtendo uma tendência ao comportamento da função y . Observa-se que, neste caso, somente três inclinações são calculadas, devido ao fato de que aqui a função y depende de apenas uma variável, x .

Evento: XXV Seminário de Iniciação Científica

Utilizando um software de CAE, podemos simular uma carga aplicada na viga a ser analisada, e obter resultados de deflexão. Neste caso, os cálculos são feitos pelo Método de Elementos Finitos, que não será abordado neste trabalho.

3. Resultados e discussão

Neste problema, temos valores de contorno estabelecidos para o tipo de apoio que sustenta a viga. Para uma viga engastada, com seu suporte na extremidade esquerda, temos os seguintes valores iniciais (GERE, 2004):

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= 0 \text{ quando } x = 0 \\ y(x) &= 0 \text{ quando } x = 0\end{aligned}$$

Resolvendo este problema de valor inicial, dado pela Eq. (2) substituída na Eq. (3), e pelas condições dadas acima, tem-se como resultado:

$$y(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{3000Px^2}{EI} \quad (5)$$

Analiticamente, a deflexão em cada ponto ao longo da viga pode ser definida por meio da equação (5). Para $x = 6000$ mm, o valor da deflexão máxima da viga é de $-60,35406$ mm. O sinal negativo indica que o ponto de máxima deflexão está abaixo do eixo da abscissa.

Considerando $I = 5964801,464 \text{ mm}^4$ e $E = 200000 \text{ MPa}$, valores estes obtidos pela geometria e material utilizados na construção da viga, e aplicando uma carga $P = 1000 \text{ N}$, obtém-se a curvatura da linha neutra da viga analisada (figura 4a).

Para aplicar o método de Runge-Kutta de quarta ordem, considera-se que:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - 6000Px \right) \\ x_0 &= 0 \text{ e } y_0 = 0\end{aligned} \quad (6)$$

Definindo um passo h , inversamente proporcional à precisão do resultado, obtém-se um resultado y para valor definido de x em n iterações. Como neste trabalho o objetivo é determinar a deflexão máxima, neste caso em $x = 6000$ mm, o método numérico a ser aplicado torna-se extremamente cansativo, por haver aqui um número muito grande de iterações necessárias, e levando em consideração que, para cada iteração, quatro cálculos devem ser feitos.

Com isto em mente, pode-se aplicar este mesmo método numérico apresentado em um *software*. Para este trabalho, o MATLAB será encarregado de computar estes valores para um x qualquer,

Evento: XXV Seminário de Iniciação Científica

que pertença ao intervalo $0 \leq x \leq 6000$, com um passo de h , e plotar a curvatura da linha neutra da viga (figura 4b), através do algoritmo mostrado na figura 3.

```

1  %Método De Runge-Kutta 4ª Ordem
2  - clear
3  - clc
4  - X(1)=input('Entre com o X inicial, Xo=');
5  - Y=input('Entre com o y inicial, Yo=');
6  - h=input('Entre com o valor do passo, h=');
7  - XX=input('Entre com o valor de x a ser determinado, x=');
8
9  - F=input('Entre com o módulo da força a ser aplicada, em Newtons: ');
10 - E=input('Entre com o módulo de Young, em MPa: ');
11 - I=input('Entre com o momento de inércia, em mm^4: ');
12 -
13 - X=X(1):h:XX;
14 - n=size(X);
15 - for i=1:(n(2)-1)
16 -     k1=(P/(E*I))*(((X(i)^2)/2)-6000*X(i));
17 -     k2=(P/(E*I))*(((X(i)+(h/2))^2)/2)-6000*(X(i)+h/2));
18 -     k4=(P/(E*I))*(((X(i)+h)^2)/2)-6000*(X(i)+h));
19 -     Y(i+1)=Y(i)+(h/6)*(k1+(4*k2)+k4);
20 - end
21
22 - disp('A solução é:')
23 - Y(n(2))
24 - x0=h:XX;
25 - plot(x0,Y)
26 - axis equal
    
```

Figura 3: Método de Runge-Kutta implementado em MATLAB.

Como resultado, em $x = 6000$ mm, obtém-se deste algoritmo a deflexão máxima de -60,3541 mm.

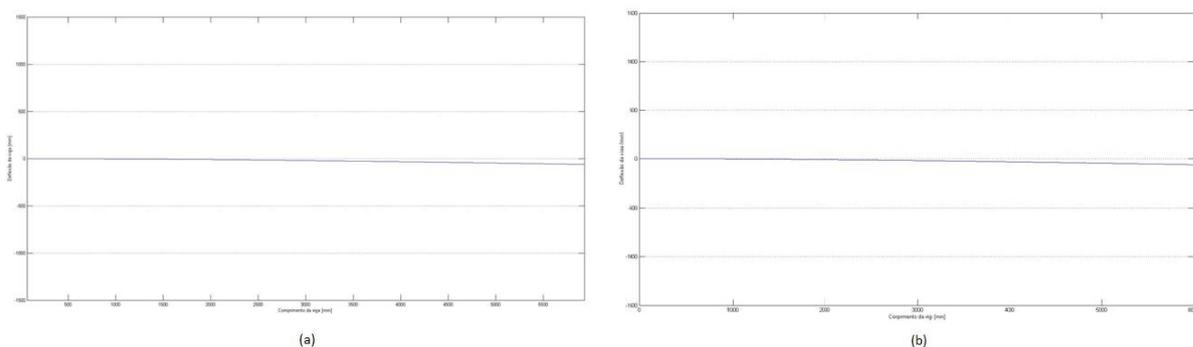
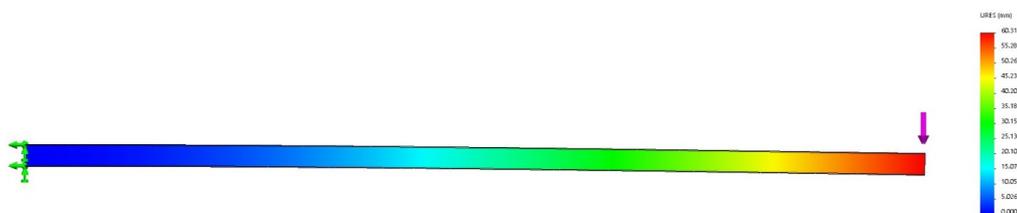


Figura 4: (a) curvatura analítica e (b) curvatura obtida pelo método de Runge-Kutta da linha neutra da viga.

A figura 5 mostra, no *software* de simulação utilizado, o comportamento da viga quando sujeita a uma força $P = 1000$ N, com a respectiva deflexão máxima de 60,31372 mm.



Evento: XXV Seminário de Iniciação Científica

Figura 5: Viga flexionada com carga de 1000 N.

4. Considerações finais

Considerando a deflexão obtida no *software* de simulação como um parâmetro real, por este levar em conta inúmeras variáveis e condições, o erro percentual dos métodos analítico e numérico apresentados neste trabalho foi respectivamente de 0,0668% e 0,0669%. Analisa-se que o método numérico implementado nesta situação teve resultados altamente precisos, e conclui-se que é possível aplicar, com excelentes resultados, um método como o de Runge-Kutta em situações onde há uma equação diferencial, como no caso da deflexão de uma viga engastada.

Para fins demonstrativos, o caso aqui ilustrado é simples; no entanto, carregamentos mais complexos, ou até mesmo vigas com geometria não uniforme, podem ter cálculos de deflexão feitos com a ajuda de um método numérico confiável. Comparativamente com o *software* utilizado para obter valores de deflexão, os cálculos feitos baseados nas teorias de viga de Euler e Bernoulli, auxiliados por um método numérico, podem fornecer resultados precisos com custo muito reduzido, se levado em consideração o investimento necessário para aquisição de um *software* de simulação.

Métodos numéricos, como o de Runge-Kutta, podem ser aplicados em equações diferenciais de ordem superior. Porém, optou-se por simplificar a resolução numérica deste problema, utilizando-se a equação diferencial de primeira ordem obtida no procedimento analítico.

Palavras-chave: método numérico; MATLAB; mecânica dos sólidos.

Keywords: *numerical method, MATLAB; solid mechanics.*

5. Referências

BAUCHAU, O. A.; CRAIG, J. I. Euler-Bernoulli beam theory. In: **Structural analysis**. Springer Netherlands, 2009. p. 173-221.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

GERE, J. M. **Mechanics of Materials**. 6th ed. Belmont: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2004. 940 p.

HIBBELER, Russell C. et al. **Mechanics of Materials**. 8th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 862 p.

TREFETHEN, L. N. Branches of Mathematics: Numerical Analysis. In: GOWERS, T.; BARROW-GREEN, J.; LEADER, I. (Eds). **The Princeton Companion to Mathematics**. Princeton University Press, 2010. p. 604-615.