

01 a 04 de outubro de 2018

Evento: Bolsistas de Iniciação Científica e Iniciação Tecnológica da Unijuí

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE PLATAFORMA EXPERIMENTAL PARA
SIMULAÇÃO DE AERONAVE MULTIRROTORA¹
MATHEMATICAL MODELLING OF EXPERIMENTAL PLATFORM FOR
SIMULATION OF MULTIROTOR AIRCRAFT**

**Christopher Sauer², Manuel Martín Pérez Reibold³, João Vitor Das
Chagas Silva⁴, Elisiane Pelke Paixão⁵**

¹ Projeto de pesquisa realizado no curso de Engenharia Elétrica da Unijuí, junto ao GAIC (Grupo de Automação Industrial e Controle)

² Aluno do curso de Engenharia Elétrica da UNIJUI, Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/UNIJUI, kikisauer@gmail.com

³ Professor Doutor no Curso de Mestrado e Doutorado em Modelagem Matemática e no Curso de Engenharia Elétrica do DCEEng (Departamento de Ciências Exatas e Engenharias) - UNIJUI, manolo@unijui.edu.br

⁴ Aluno do curso de Engenharia Elétrica da UNIJUI, Bolsista de Iniciação Científica PROBIC/FAPERGS, joaovitor753pw@gmail.com

⁵ Aluno do curso de Engenharia Elétrica da UNIJUI, Bolsista de Iniciação Científica PROBIC/FAPERGS, elisianep251@gmail.com

INTRODUÇÃO

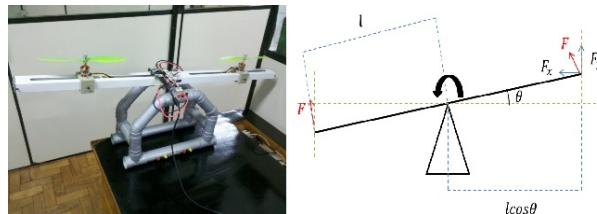
O presente trabalho trata da modelagem matemática de uma plataforma experimental que simula o movimento de uma aeronave multirrotores. Os veículos aéreos multirrotores destacam-se por serem aeronaves de grande versatilidade, com uso crescente em diferentes áreas. Sua dinâmica de vôo permite aplicar os conhecimentos da teoria de Controle de Sistemas para garantir a estabilidade. Dessa forma, tornam-se tópico ativo de pesquisa na academia. A plataforma consiste em uma gangorra com motores em cada extremidade. A variação da velocidade dos motores varia o ângulo da gangorra, sendo possível selecionar um ângulo desejado e observar a resposta do sistema conforme o ajuste acontece. O controle da aeronave exige que se conheça o modelo matemático da mesma. No entanto, trata-se de um sistema dinâmico e instável, e a obtenção do modelo não é um processo trivial. A plataforma experimental permitirá o estudo da modelagem de um dos movimentos da aeronave, simplificando o processo de obtenção de um modelo para a aeronave completa. Nesse contexto, este trabalho investiga a modelagem matemática de uma plataforma experimental, visando a obtenção de um modelo simplificado a partir de equações físicas. A contribuição está em facilitar a obtenção de um modelo para uma aeronave multirrotores, promovendo o conhecimento na área.

METODOLOGIA

01 a 04 de outubro de 2018

Evento: Bolsistas de Iniciação Científica e Iniciação Tecnológica da Unijui

A metodologia utilizada no estudo se inicia pelo estabelecimento das equações fundamentais que regem a dinâmica da plataforma, seguida pela dedução de um modelo matemático, e por fim a simulação do modelo em ambiente de *software*, utilizando parâmetros reais do sistema. A plataforma experimental desenvolvida é mostrada na Figura 1. Possui estrutura de canos de PVC, ligados de tal forma a dar estabilidade à plataforma, e em sua parte superior conecta-se à gangorra por meio de rolamento, o que permite um movimento livre de atrito significativo. A Figura 1 também mostra um diagrama de forças da plataforma.



As equações básicas do movimento angular são definidas da seguinte forma:

$\omega(t) = d/dt \theta(t)$ (1), onde $\theta(t)$ é a posição angular no tempo e $\omega(t)$ é a velocidade angular no tempo.

$\alpha = d/dt \omega(t) = d^2/dt^2 \theta(t)$ (2), onde α é a aceleração angular, segunda derivada da posição angular.

O movimento de uma barra fina rotacionando em torno de um eixo perpendicular ao seu centro de gravidade pode ser descrito pelo torque em torno desse eixo e a aceleração angular resultante, de tal forma que:

$T = J \cdot \alpha$ (3), onde τ é o torque e J é o momento de inércia da barra fina.

Isolando-se α na equação (3) e inserindo o resultado da equação (2), obtém-se:

$$d^2/(dt^2) \theta(t) = \tau/J$$
 (4)

A análise do diagrama da gangorra evidencia que, para um determinado ângulo θ de inclinação, as forças exercidas nas extremidades podem ser decompostas em suas componentes verticais e horizontais, em função do mesmo ângulo de inclinação θ . As componentes horizontais da força (F_x) cancelam-se mutuamente. As componentes verticais da força (F_y) podem ser definidas da seguinte forma, por inspeção:

$$F_y = F \cdot \sin(90^\circ - \theta)$$
 (5)

O torque resultante no eixo perpendicular ao da gangorra, no mesmo plano, é dado pelo somatório dos momentos:

$$\tau_{res} = \sum M = F_1 \cdot d \cos \theta - F_2 \cdot d \cos \theta$$
 (6)

01 a 04 de outubro de 2018

Evento: Bolsistas de Iniciação Científica e Iniciação Tecnológica da Unijuí

Considerando-se a força atuante no momento como F_y e $F_1 = -F_2$, pode-se escrever o torque resultante como:

$$\tau_{res} = F_y \cdot d \cos \theta - F_y \cdot d \cos \theta \quad (7)$$

Substituindo a equação (5) na (7):

$$\tau_{res} = d \cos \theta (2 \cdot F \cdot \sin(90^\circ - \theta)) \quad (8)$$

Levando em consideração a identidade trigonométrica $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, e fazendo a linearização do cosseno para pequenos ângulos ($\cos \theta = 1$), obtém-se:

$$\tau_{res} = 2dF \quad (9)$$

A força exercida verticalmente pela rotação da hélice é o empuxo E . De acordo com Chagas Silva (2017), o empuxo pode ser definido pelos parâmetros da hélice:

$E = K_t \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \omega_h$ (10), onde K_t é a constante de empuxo do motor, ρ é a densidade do ar, D é o diâmetro da hélice e ω_h é a velocidade angular de rotação da hélice.

Dessa forma, a equação (4) pode ser reescrita como:

$$d^2/(dt^2) \theta(t) = (2d \cdot K_t \cdot \rho \cdot D^4 \cdot \omega_h) / J \quad (11)$$

Modelando a gangorra como uma barra fina, seu momento de inércia J é definido da seguinte forma:

$$J = mL^2/12 \quad (12), \text{ onde } L = 2d.$$

Inserindo a equação (12) na (11) e fazendo-se as devidas substituições, obtém-se a seguinte equação:

$$d^2/(dt^2) \theta(t) = (12K_t \rho D^4) / mL \omega_h \quad (13)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace para a equação diferencial (13), com θ como saída, e ω_h como entrada, obtém-se a seguinte função de transferência, que modela a gangorra:

$$(\theta(s)) / (\omega_h(s)) = (12K_t \rho D^4 / mL) / s^2 \quad (14)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como primeiro resultado tem-se a função de transferência que modela o sistema, mostrada na equação (14). A função possui dois pólos reais e iguais, localizados na origem do plano s ,

01 a 04 de outubro de 2018

Evento: Bolsistas de Iniciação Científica e Iniciação Tecnológica da Unijui

comprovando a natureza oscilatória da gangorra. Definindo os parâmetros físicos da plataforma conforme a Tabela 1, é possível obter a função de transferência em malha aberta do sistema.

$$(\theta(s))/(\omega h(s)) = 1,31/s^2 \quad (15)$$

Tabela 1 - Parâmetros físicos do sistema

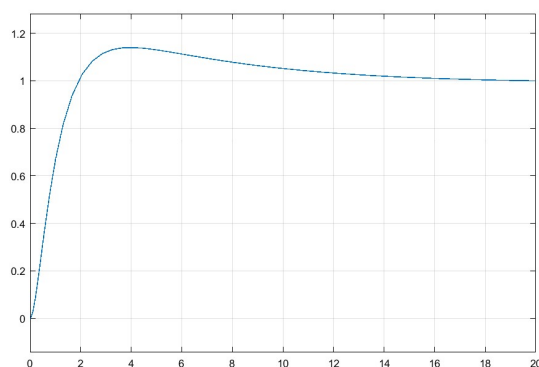
Kt	1,5
ρ	1,225 kg/m ³
D	10" = 0,254 m
m	0,1 kg
L	0,7 m

Onde Kt é o coeficiente de empuxo, ρ é a densidade do ar a 15 °C e no nível do mar, D é o diâmetro da hélice utilizada (10x4,5), m é a massa da gangorra e L é o comprimento da gangorra. Como segundo resultado, tem-se a simulação em *software*, para o que utiliza-se o MATLAB. Aplica-se um controlador PID à planta, com realimentação negativa. O controlador PID é sintonizado pelo aplicativo Tune do MATLAB, permitindo obter os valores dos parâmetros do controlador. Dessa forma, não é necessário aplicar fórmulas empíricas, como as de Ziegler & Nichols (1942). A Tabela 2 mostra os parâmetros obtidos.

Tabela 2 - Parâmetros do controlador PID

Kp	0,14174
Ki	0,006635
Kd	0,74345
N	5,454

Aplica-se um valor de velocidade angular na entrada no sistema, correspondente a um degrau de amplitude 1 rad/s. A resposta obtida é mostrada na Figura 2.



01 a 04 de outubro de 2018

Evento: Bolsistas de Iniciação Científica e Iniciação Tecnológica da Unijuí

Os resultados apresentados mostram que o sistema em malha fechada é estável, com sua saída tendendo ao valor de referência. O tempo de subida é de 1,93 s, o tempo de pico é de aprox. 4,06 s e o tempo de acomodação é de aprox. 14 s (para o critério de 2%). Além disso, o máximo sobressinal é de aprox. 14%. Dessa forma, se evidencia a validade do modelo obtido, bem como a possibilidade de ser controlado por um controlador PID. Como trabalho futuro sugere-se a utilização da metodologia proposta para obter o modelo matemático da aeronave multirrotores completa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática de uma plataforma experimental visa estudar o processo de obtenção de um modelo para uma aeronave multirrotores. A dedução de uma função de transferência para o sistema a partir de equações físicas é comprovada pela simulação do modelo em malha fechada. A aplicação de um controlador PID evidencia a possibilidade de controlar a dinâmica da gangorra, atingindo a estabilidade. Os resultados demonstram a validade da metodologia, assim como a utilidade da plataforma proposta. As implicações são de interesse, tanto para a academia, como para a indústria, pois ambos obtêm benefício pela modelagem proposta. As perspectivas são de que o método proposto sirva para difundir o conhecimento e impulsionar futuras descobertas no estudo de aeronaves multirrotores.

Palavras-chave: modelagem matemática, aeronave multirrotores, PID.

Keywords: *mathematical modelling, multicopter aircraft, PID.*

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UNIJUI e ao GAIC (Grupo de Automação Industrial e Controle) o apoio e a estrutura fornecidos.

REFERÊNCIAS

DAS CHAGAS SILVA, J. V., et al. **Revisão Bibliográfica sobre Modelagem Caixa Branca de Hélices.** XXV Seminário de Iniciação Científica, 5 p., 2017.

ZIEGLER, J. G. e NICHOLS, N. B. **Optimum Settings for Automatic Controllers.** *The American Society of Mechanical Engineers*, p. 759-768, 1942.